NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FRÉCHET

Sur la notion de différentielle totale

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 433-449

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__433_0>

SUR LA NOTION DE DIFFÉRENTIELLE TOTALE;

Par M. Maurice FRÉCHET,
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

(*Suite et fin.*)

13. Différentiation des intégrales dépendant de plusieurs paramètres. — *Soit $f(x, \alpha, \beta)$ une fonction intégrable par rapport à x dans le domaine* D

$$a \leqq x \leqq b, \qquad \alpha' < \alpha < \alpha'', \qquad \beta' < \beta < \beta''.$$

Si $f(x, \alpha, \beta)$ admet une différentielle au sens de Stolz par rapport à α et β en tout point du domaine D *et si cette différentielle reste bornée dans ce domaine (quand les accroissements $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ restent bornés), l'intégrale*

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta) = \int_a^b f(x, \alpha, \beta)\, dx$$

a une différentielle au sens de Stolz en tout point du domaine S

$$\alpha' < \alpha < \alpha'', \qquad \beta' < \beta < \beta'',$$

et cette différentielle est donnée par

$$d\mathrm{F} = \Delta\alpha \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha, \beta)\, dx + \Delta\beta \int_a^b f'_\beta(x, \alpha, \beta)\, dx.$$

Nous ne ferons que généraliser l'énoncé donné par par MM. Arzela (¹) et Tonelli (²) pour le cas d'un

(¹) *Sulle serie di funzioni* (*Accademia di Bologna*, 1900, p. 45).

(²) *Su la continuità e la derivabilita d'un integrale* (*Rendiconti dei Livia*, 1910, p. 87).

seul paramètre, cas où les deux définitions de la différentielle coïncident.

Nous supposons que les intégrales soient prises au sens de M. Lebesgue ([1]). On a

$$f'_\alpha(x, \alpha, \beta) = \lim_{\Delta\alpha=0} \left[\frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha, \beta) - f(x, \alpha, \beta)}{\Delta\alpha}\right];$$

donc $f'_\alpha(x, \alpha, \beta)$ est une fonction bornée limite de fonctions mesurables. Elle est donc aussi intégrable ([2]). Ainsi les intégrales

$$A(\alpha, \beta) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha, \beta)\,dx, \qquad B(\alpha, \beta) = \int_a^b f'_\beta(x, \alpha, \beta)\,dx$$

existent. Il reste à montrer que la quantité

$$\varepsilon(\alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta) = \frac{F(\alpha+\Delta\alpha, \beta+\Delta\beta) - F(\alpha, \beta) - \Delta\alpha\, A(\alpha, \beta) - \Delta\beta\, B(\alpha, \beta)}{|\Delta\alpha| + |\Delta\beta|}$$

est infiniment petite avec $|\Delta\alpha| + |\Delta\beta|$. Or on peut l'écrire

$$\varepsilon(\alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta) = \int_a^b \varphi(x, \alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta)\,dx$$

avec

$$\varphi(x, \alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta) = \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha, \beta+\Delta\beta) - f(x, \alpha, \beta) - \Delta\alpha f'_\alpha(x, \alpha, \beta) - \Delta\beta f'_\beta(x, \alpha, \beta)}{|\Delta\alpha| + |\Delta\beta|}.$$

Pour toute valeur déterminée de x, cette quantité est infiniment petite quand $|\Delta\alpha| + |\Delta\beta|$ tend vers zéro. S'il n'en était pas de même de ε, on pourrait trouver une suite de nombres $\Delta\alpha_n$, $\Delta\beta_n$ tels que $|\Delta\alpha_n| + |\Delta\beta_n|$ tende vers zéro et que $|\varepsilon(\alpha, \beta, \Delta\alpha_n, \Delta\beta_n)|$ reste supérieur à un nombre positif fixe.

([1]) LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, Paris, 1904, p. 98.

([2]) LEBESGUE, *loc. cit.*, p. 111.

Or c'est impossible. On sait en effet que si une suite de fonctions de x, $\varphi(x, \alpha, \beta, \Delta\alpha_n, \Delta\beta_n)$ convergent vers zéro en tout point de a, b et sont bornées dans leur ensemble, leur intégrale dans (a, b) tend vers zéro [1]. C'est ici précisément le cas, car on peut écrire d'après le théorème (10)

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(x, \alpha, \beta, \Delta\alpha, \Delta\beta)| \\
&= \left| \frac{\Delta\alpha[f'_{\alpha_1}(x,\alpha_1,\beta_1) - f'_\alpha(x,\alpha,\beta)] + \Delta\beta[f'_{\beta_1}(x,\alpha_1,\beta_1) - f'_\beta(x,\alpha,\beta)]}{|\Delta\alpha| + |\Delta\beta|} \right| \\
&\leqq 2P,
\end{aligned}
$$

si P est la borne supérieure finie des dérivées f'_α, f'_β dans D.

Il résulte du théorème précédent que, si α et β sont des fonctions dérivables d'un même paramètre λ, on aura

$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{d\alpha}{d\lambda} \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha, \beta)\, dx + \frac{d\beta}{d\lambda} \int_a^b f'_\beta(x, \alpha, \beta)\, dx.$$

Cette conséquence ne serait plus exacte si l'on supprimait dans l'énoncé les mots, « au sens de Stolz ». En effet, supposons par exemple

$$f(x, \alpha, \beta) \equiv \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\, x \qquad \text{pour} \qquad \alpha^2 + \beta^2 \lesseqgtr 0,$$

$$f(x, 0, 0) \equiv x,$$

on aurait

$$F(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \, \frac{b^2 - a^2}{2}$$

pour $\alpha^2 + \beta^2 \lesseqgtr 0$ et

$$F(0, 0) = 0.$$

La fonction $f(x, \alpha, \beta)$ a bien des dérivées partielles en α, β quels que soient α, β; il est facile de voir que ces dérivées

(1) Lebesgue, *loc. cit.*, p. 114.

partielles restent en valeur absolue inférieures à 2 quels que soient α, β. On devrait donc avoir

$$(1)\quad \frac{d}{d\lambda}\mathrm{F}(\lambda,\lambda) = \int_a^b f'_\alpha(x,\lambda,\lambda)\,dx + \int_a^b f'_\beta(x,\lambda,\lambda)\,dx.$$

Or

$$\mathrm{F}(\lambda,\lambda) = |\lambda|\left(\frac{b^2-a^2}{\sqrt{2}}\right),$$

qui n'est pas dérivable pour $\lambda = 0$.

14. Théorème. — *Si une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle au sens de Stolz au point $(x_0 y_0)$, la surface $z = f(x, y)$ admet en ce point un plan tangent unique non parallèle à Oz et dont l'équation est*

$$(\mathrm{T})\qquad z - z_0 = (x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0}$$

et réciproquement.

1° Considérons une courbe l du plan des x, y qui passe par le point (x_0, y_0) et y admet une tangente dont j'appelle les cosinus directeurs $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

Cette courbe est la projection d'une courbe L de la surface, qui passe au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Je vais démontrer : I° que L a une tangente au point considéré; II° que cette tangente est dans le plan T.

Soient en effet $x_0 + h$, $y_0 + k$, $f(x_0+h, y_0+k)$ les coordonnées d'un point M de L. Les cosinus directeurs de la droite MM_0 sont *proportionnels* aux quantités

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \qquad \beta = \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$
$$\gamma = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

D'après l'hypothèse, cette dernière quantité peut s'écrire

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} f'_{x_0} + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} f'_{y_0} + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec $\sqrt{h^2+k^2}$. Lorsque h^2+k^2 tend vers zéro, les trois quantités α, β, γ tendent vers

$$\cos\varphi, \quad \sin\varphi, \quad \cos\varphi f'_{x_0} + \sin\varphi f'_{y_0},$$

ce qui démontre à la fois les deux propriétés annoncées.

Il en résulte, d'une part : que si une courbe L tracée sur la surface passe en M_0 et y admet une tangente, cette tangente est dans le plan T; d'autre part que toute droite D du plan T passant par M_0 peut être considérée comme la tangente en M_0 à une courbe tracée sur la surface, par exemple, d'une courbe quelconque dont la projection sur xOy est tangente à la projection de D au point correspondant.

Ce sont ces propriétés qu'on exprime en disant que T est le plan tangent à la surface en M_0, c'est-à-dire le lieu géométrique des tangentes en M_0 des courbes tracées sur la surface, et passant par M_0.

Le théorème actuel, lui aussi, est inexact quand on y comprend la différentielle au sens ordinaire, sans ajouter d'hypothèses supplémentaires comme au n° 2. On le voit par exemple pour la surface $z = y\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}$ avec $z = 0$ pour $x^2+y^2=0$. A l'origine les dérivées partielles sont nulles. Il devrait donc y avoir à l'origine un plan tangent unique qui serait xOy. Or cette surface est évidemment un cône de sommet o. Les génératrices sont des tangentes qui ne sont pas toutes dans xOy.

2° Réciproquement, si la surface $z=f(x,y)$ admet un plan tangent non parallèle à Oz au point (x_0, y_0, z_0), la fonction $f(x,y)$ admet une différentielle au sens de

Stolz pour $x = x_0$, $y = y_0$. Et en écrivant l'équation du plan tangent sous la forme

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

l'expression de la différentielle sera

$$df = p\,\Delta x + q\,\Delta y.$$

Il s'agit de démontrer que la quantité

$$\Delta f - df \equiv f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - p\,\Delta x - q\,\Delta y$$

est un infiniment petit par rapport à $|\Delta x| + |\Delta y|$, ou, ce qui sera plus commode ici, à $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

En effet, dans le cas contraire, il existerait un nombre $\varepsilon > 0$, tel que, quel que soit n, on puisse trouver des accroissements h_n, k_n, vérifiant à la fois

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{h_n^2 + k_n^2} < \dfrac{1}{n} \\ \text{et} \\ \dfrac{|f(x_0 + h_n, y_0 + k_n) - f(x_0, y_0) - ph_n - qk_n|}{\sqrt{h_n^2 + k_n^2}} > \varepsilon. \end{array} \right.$$

Soient $\cos\alpha_n$, $\cos\beta_n$, $\cos\gamma_n$, les cosinus directeurs de la droite M_0M_n joignant le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au point M_n de la surface correspondant à $x_0 + h_n$, $y_0 + k_n$. On peut considérer $\cos\alpha_n$, $\cos\beta_n$, $\cos\gamma_n$ comme les coordonnées d'un point μ_n d'une sphère de rayon 1, et l'on pourra toujours extraire de la suite des points μ_1, μ_2, ..., μ_n ... une suite de points qui tend vers un point déterminé μ.

Autrement dit, en supprimant au besoin de la suite des (h_n, k_n) certains éléments, on pourra supposer que les suites des $\cos\alpha_n$, des $\cos\beta_n$, des $\cos\gamma_n$ tendent respectivement vers trois limites déterminées $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, les inégalités (6) continuant à avoir lieu.

Ceci étant, considérons une courbe C du plan des xy passant par les projections des points M_n et de M_0 (par exemple, la ligne polygonale qu'elles déterminent) dans l'ordre M_1, M_2, ..., M_n, ..., M_0. Ce sera la projection d'une courbe Σ de la surface qui aura évidemment en M_0 une tangente, de coefficients directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Cette tangente sera donc dans le plan tangent donné, de sorte que

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$$

ou encore que l'expression

$$P_n = \cos\gamma_n - p\cos\alpha_n - q\cos\beta_n$$

tend vers zéro. Or la quantité

$$Q_n = \frac{f(x_0+h_n, y_0+k_n) - f(x_0, y_0) - ph_n - qk_n}{\sqrt{h_n^2+k_n^2}}$$

reste par hypothèse en valeur absolue supérieure à ε. D'autre part, elle est égale à $\frac{P_n}{\sin\gamma_n}$ qui tend vers zéro puisque $\sin\gamma$ ne peut être nul.

DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

15. *Différentielle seconde.* — Nous dirons qu'une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle du second ordre au sens de Stolz au point x_0, y_0, si : 1° elle admet une différentielle au sens de Stolz en (x_0, y_0) et dans son voisinage; 2° si cette différentielle $f'_x\Delta x + f'_y\Delta y$ admet, quels que soient Δx, Δy, une différentielle au même sens au point (x_0, y_0).

Cette deuxième condition revient à dire que f'_x et f'_y ont chacune une différentielle au sens de Stolz au point (x_0, y_0). Nous écrirons, en remarquant que les nouveaux accroissements de x, y sont indépendants des premiers,

$$d'f'_x = f''_{x_0^2}\,\Delta' x + f''_{x_0 y_0}\,\Delta' y\,; \qquad d'f'_y = f''_{y_0 x_0}\,\Delta' x + f''_{y_0^2}\,\Delta' y.$$

De sorte que la différentielle seconde de f a pour expression

$$\begin{aligned} d'\,df &= d'f'_x\,\Delta x + d'f'_y\,\Delta y \\ &= f''_{x_0^2}\,\Delta x\,\Delta' x + f''_{x_0 y_0}\,\Delta x\,\Delta' y + f''_{y_0 x_0}\,\Delta' x\,\Delta y + f''_{y_0^2}\,\Delta y\,\Delta' y. \end{aligned}$$

C'est donc une fonction bilinéaire par rapport à $(\Delta x, \Delta y)$, $(\Delta' x, \Delta' y)$. Je remarque tout de suite que *cette fonction bilinéaire est symétrique; autrement dit* $f''_{x_0 y_0} = f''_{y_0 x_0}$. C'est ce que nous allons prouver. Mais la même méthode de démonstration nous donnera le moyen de calculer la différentielle seconde sans passer par l'intermédiaire de la différentielle première.

Nous emploierons le procédé classique qui consiste à calculer de deux manières la différence seconde de $f(x, y)$. Mais la méthode de démonstration sera sensiblement différente de la méthode ordinaire.

Nous supposons seulement que la différentielle seconde de f existe au sens de Stolz au point x_0, y_0. C'est dire que si l'on écrit pour simplifier cette différentielle sous la forme

$$d'\,df = (A h' + B k')h + (B_1 h' + C k')k,$$

on a

$$(7)\quad \begin{aligned} f'_X(X, Y) = f'_{x_0}(x_0, y_0) &+ A(X - x_0) + B(Y - y_0) \\ &+ \lambda\{|X - x_0| + |Y - y_0|\}, \end{aligned}$$

$$(8)\quad \begin{aligned} f'_Y(X, Y) = f'_{y_0}(x_0, y_0) &+ B_1(X - x_0) + C(Y - y_0) \\ &+ \mu\{|X - x_0| + |Y - y_0|\}, \end{aligned}$$

les quantités λ, μ tendant vers zéro avec

$$|X - x_0| + |Y - y_0|.$$

ε étant un nombre > 0 arbitraire, nous pourrons choisir un nombre η tel que pour

$$|X - x_0| + |Y - y_0| < \eta$$

on ait

$$|\lambda| < \varepsilon, \qquad |\mu| < \varepsilon.$$

Ceci étant, considérons la différence seconde de f, c'est-à-dire l'expression

$$\Delta' \Delta f = \varphi(x_0 + h', y_0 + k') - \varphi(x_0, y_0)$$

avec

$$\varphi(x, y) = f(x + h. y + k) - f(x, y).$$

Nous supposons que $f(x, y)$ est continue et dérivable en x et en y au voisinage de (x_0, y_0). Si donc h, k sont assez petits, il en sera de même de $\varphi(x, y)$. On pourra écrire

$$\begin{aligned}
(9) \quad \Delta' \Delta f = {} & \varphi(x_0 + h', y_0 + k') - \varphi(x_0, y_0) \\
= {} & \varphi(x_0 + h', y_0 + k') - \varphi(x_0 + h', y_0) \\
& + \varphi(x_0 + h', y_0) - \varphi(x_0, y_0) \\
= {} & k' \varphi'_y(x_0 + h', y_0 + \theta k') + h' \varphi'_x(x_0 + \theta' h', y_0)
\end{aligned}$$

avec

$$0 < \theta < 1, \qquad 0 < \theta' < 1.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\varphi'_x(x, y) = {} & f'_x(x + h, y + k) - f'_x(x, y) \\
= {} & [f'_x(x + h, y + k) - f'_x(x_0, y_0)] \\
& - [f'_x(x, y) - f'_x(x_0, y_0)],
\end{aligned}$$

d'où, d'après (7) et (8),

$$(10) \qquad \varphi'_x(x, y) = A h + B k + \lambda_1 l_1 - \lambda_2 l_2.$$

où λ_1, λ_2 sont des valeurs de λ correspondant à

$$\begin{aligned}
l_1 &= |x + h - x_0| + |y + k - y_0|, \\
l_2 &= |x - x_0| + |y - y_0|,
\end{aligned}$$

et de même pour $\varphi'_y(x, y)$.

Donc, d'après (9),

$$\begin{aligned}\Delta'\Delta f = {} & h'[A\,h + Bk + \lambda_1 l_1 - \lambda_2 l_2] \\ & + k'[B_1 h + Ck + \lambda'_1 l'_1 - \lambda'_2 l'_2] \\ = {} & A hh' + (Bh'k + B_1 hk') + Ckk' \\ & + h'(\lambda_1 l_1 - \lambda_2 l_2) + k'(\lambda'_1 l'_1 - \lambda'_2 l'_2);\end{aligned}$$

$$\tag{11} \begin{aligned} & |\Delta'\Delta f - (A hh' + Bh'k + B_1 hk' + Ckk')| \\ & \leqq [|h'| + |k'|]\{|\lambda_1||l_1| + |\lambda_2||l_2| + |\lambda'_1||l'_1| + |\lambda'_2||l'_2|\} \\ & \leqq \{|h'| + |k'|\}.4\varepsilon\{|h| + |k| + |h'| + |k'|\},\end{aligned}$$

si l'on prend

$$|h| + |k| + |h'| + |k'| < \eta,$$

car alors

$$\begin{aligned} & l_1 = |h' + h| + |\theta k' + k| < \eta, \qquad l_2 = |h'| + |\theta k'| < \eta; \\ & l'_1 = |\theta' h' + h| + |k| < \eta, \qquad l'_2 = |\theta' h'| < \eta; \\ & |l| + |l'_1| + |l_2| + |l'_2| \leqq 4\{|h| + |h'| + |k| + |k'|\}.\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas particulier où

$$h' = k = 0 \quad \text{et} \quad h = k' \gtrless 0.$$

On aura

$$|\Delta'\Delta f - B_1 h^2| \leqq 2\varepsilon h^2.$$

D'où

$$\left|\frac{\Delta'\Delta f}{h^2} - B_1\right| \leqq 2\varepsilon$$

pour $2|h| < \eta$. Autrement dit, lorsque h tend vers zéro, on a

$$\begin{aligned} B_1 & = \lim \frac{\Delta'\Delta f}{h^2} \\ & = \lim \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)}{h^2}.\end{aligned}$$

Or si l'on avait calculé d'abord $\Delta\Delta' f$ en permutant h, k avec h', k' puis faisant $h' = k = 0$, on aurait trouvé que le second membre tend vers B. Donc

$$B = B_1, \qquad f''_{x_0 y_0} = f''_{y_0 x_0} \quad (^1)$$

ou encore

$$d\,d'f = d'\,df.$$

Revenons maintenant au cas général où h, k, h', k' sont quelconques. On aura, d'après (11),

$$\frac{|\Delta'\Delta f - d\,d'f|}{(|h|+|k|)(|h'|+|k'|)} \leqq 4\varepsilon + 4\varepsilon\left(\frac{|h'|+|k'|}{|h|+|k|}\right)$$

pour $|h|+|k|+|h'|+|k'| < \eta$. Or en permutant h, k avec h', k', il est évident que $\Delta\Delta' f$ garde la même valeur $\Delta'\Delta f$, et nous venons de démontrer que

$$dd'f = d'df.$$

Donc le premier membre est aussi au plus égal à

$$4\varepsilon + 4\varepsilon\left(\frac{|h|+|k|}{|h'|+|k'|}\right).$$

Comme l'un des deux nombres

$$\frac{|h|+|k|}{|h'|+|k'|}, \quad \frac{|h|+|k|}{|h'|+|k'|}$$

est au plus égal à 1, on a donc

$$\frac{|\Delta'\Delta f - d\,d'f|}{(|h|+|k|)(|h'|+|k'|)} \leqq 8\varepsilon$$

pour $|h|+|k|+|h'|+|k'| < \eta$. Nous avons donc démontré la proposition suivante :

Théorème. — *Si une fonction $f(x, y)$ admet au sens de Stolz une différentielle première au point x_0, y_0*

(1) Cette première partie de la démonstration se retrouve dans Young, VII, p. 22; la seconde partie me semble nouvelle.

Le résultat de Young est plus étendu qu'une proposition analogue de Schwarz, laquelle suppose l'existence de f''_{xy} *au voisinage* de (x_0, y_0).

et à son voisinage et une différentielle seconde au même sens au point x_0, y_0, la différentielle seconde ne diffère de la différence seconde correspondante de f que d'une quantité infiniment petite par rapport au produit des écarts correspondants $|h| + |k|$, $|h'| + |k'|$, quand on prend pour infiniment petit principal la somme de ces écarts (1).

Il est remarquable que ce théorème permet de calculer la différentielle seconde quand elle existe sans passer par l'intermédiaire de la différentielle première. Bien mieux, sa réciproque permet même d'assurer dans les mêmes conditions l'existence de la différentielle seconde.

16. Réciproque. — *Si une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle première au sens de Stolz au point (x_0, y_0) et en son voisinage, et s'il existe une fonction bilinéaire et symétrique par rapport à deux systèmes d'accroissements des variables [soit $Ahh' + B(hk' + h'k) + Ckk'$] qui ne diffère de la différence seconde correspondante de f que d'une quantité infiniment petite par rapport à $(|h| + |k|)(|h'| + |k'|)$ quand $|h| + |k| + |h'| + |k'|$ tend vers zéro, la différentielle seconde de f existe au sens de Stolz au point (x_0, y_0) et elle est représentée par cette fonction bilinéaire.*

En effet, par hypothèse, on a

$$\frac{\Delta' \Delta f - [Ahh' + B(hk' + h'k) + Ckk']}{(|h| + |k|)(|h'| - |k'|)} = \rho$$

(1) On pourra remarquer que notre démonstration subsiste quand on ne suppose pas que df existe au voisinage de x_0, y_0, mais seulement que f a des dérivées partielles dans ce voisinage.

avec

$$|\rho| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad |h| + |k| + |h'| + |k'| < \eta.$$

Prenons en particulier $k' = 0$, on aura

$$\frac{\dfrac{\varphi(x_0 + h', y_0) - \varphi(x_0, y_0)}{h'} - (\mathrm{A}h + \mathrm{B}k)}{|h| + |k|} = \rho.$$

Si donc, laissant h, k fixes et tels que $|h| + |k| < \eta$ on fait tendre h' vers zéro, le premier membre convergera vers

$$\frac{f'_{x_0+h}(x_0 + h, y_0 + k) - f'_{x_0}(x_0, y_0) - (\mathrm{A}h + \mathrm{B}k)}{|h| + |k|} = \rho_0$$

avec $|\rho_0| \leqq \varepsilon$.

D'après la définition de Stolz, ceci prouve que df'_x (et de même df'_y) existent au point (x_0, y_0) et sont respectivement égaux à $\mathrm{A}h + \mathrm{B}k$, $\mathrm{B}h + \mathrm{C}k$. Autrement dit, la différentielle seconde existe au sens de Stolz et est identique à la forme bilinéaire donnée.

17. *Remarque.* — Si l'on énonce la réciproque en entendant les différentielles première et seconde au sens ordinaire, la démonstration subsiste ([1]).

C'est le contraire pour le théorème direct. En effet, Schwartz a donné depuis longtemps un exemple d'une fonction

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y},$$

pour laquelle

$$f''_{xy}(0, 0) = 1, \qquad f''_{yx}(0, 0) = -1.$$

([1]) Le cas particulier où $h' = 0$, $k = 0$ et ou la différentielle est prise au sens ordinaire a déjà été obtenu par Betazzi, *Giornale di Matematiche*, t. XXI-XXII, 1883-1884, p. 146. *Voir* aussi Young, VII, p. 22.

La première conséquence de la démonstration se trouve donc inexacte quand on suppose seulement que f'_x et f'_y sont dérivables. Il est alors facile de voir qu'il en est de même du théorème. En effet, avec la définition ordinaire, il faudrait prouver que les deux quantités

$$P = \frac{\Delta' \Delta f - d' df}{(|h| + |k|)(|h'| + |k'|)},$$

$$Q = \frac{\Delta \Delta' f - d d' f}{(|h| + |k|)(|h'| + |k'|)}$$

tendent vers zéro quand $|h| + |k| + |h'| + |k'|$ tend vers zéro. Or

$$P - Q = (B - B_1)R$$

avec

$$R = \frac{k'h - kh'}{(|h| + |k|)(|h'| + |k'|)},$$

et 1° $|R| < 1$; 2° on peut faire tendre

$$|h| + |k| + |h'| + |k'|$$

vers zéro de telle manière que R converge vers n'importe quelle valeur θ donnée à l'avance entre -1 et $+1$. Il est donc impossible, si $B \lessgtr B_1$, non seulement que P et Q tendent vers zéro, mais encore que P et Q aient des limites déterminées.

18. Formule de Taylor. — *Si $f(x, y)$ est une fonction admettant une différence seconde au point x_0, y_0, on a*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) &+ hf'_{x_0} + kf'_{y_0} \\ &+ \frac{1}{2}(h^2 f''_{x_0} + 2hk f'_{x_0 y_0} + k^2 f''_{y_0}) \\ &+ \omega(h^2 + k^2), \end{aligned}$$

où ω tend vers zéro avec $h^2 + k^2$. Procédons comme Young (VII, p. 27).

D'après le théorème du n° 15, la quantité

$$(12)\quad \varepsilon = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0) - hk f''_{x_0 y}}{hk}$$

tend vers zéro en même temps que $h^2 + k^2$. Or on a d'autre part

$$f(x_0+h, y_0) = f(x_0, y_0) + h f'_{x_0}(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}(f''_{x_0^2} + 2\varepsilon_1),$$

$$f(x_0, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h f'_{y_0}(x_0, y_0) + \frac{k^2}{2}(f''_{y_0^2} + 2\varepsilon_2),$$

où ε_1 et ε_2 tendent vers zéro avec $h^2 + k^2$. En portant ces expressions dans (12), on a

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) &+ h f'_{x_0} + k f'_{y_0} \\ &+ \frac{1}{2}(h^2 f''_{x_0^2} + 2hk f''_{x_0 y_0} + k^2 f''_{y_0^2}) \\ &+ (\varepsilon_1 h^2 + \varepsilon hk + \varepsilon_2 k^2), \end{aligned}$$

et l'on peut, si l'on veut, écrire la dernière parenthèse sous la forme $\omega(h^2 + k^2)$, ω étant infiniment petit avec $h^2 + k^2$.

19. *Différentielles d'ordre supérieur.* — On peut généraliser ce qui précède et définir de même les différentielles d'un ordre quelconque.

Une fonction $f(x, y, \ldots, u)$ admet une différentielle d'ordre n au sens de Stolz au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ si : 1° elle admet des différentielles au sens de Stolz d'ordre $1, 2, \ldots, n-1$ au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ et dans son voisinage; 2° si sa différentielle d'ordre $n-1$ admet, quelles que soient les valeurs des accroissements des variables qui y figurent, une différentielle première au sens de Stolz au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$.

Moyennant cette définition, les théorèmes précédents s'étendent immédiatement au cas général actuel.

EXTENSION AU CALCUL FONCTIONNEL.

20. On dit qu'un nombre $U_{f(x)}$ est une fonctionnelle définie dans le champ C des fonctions continues dans a, b, si à toute fonction continue dans (a, b), $f(x)$ correspond une valeur bien déterminée de $U_{f(x)}$. Telle sont, par exemple, les fonctionnelles

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

maximum de $f(x)$ dans (a, b)

$$A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n).$$

On dit qu'une fonctionnelle U_f est continue dans C, si $U_{f_n(x)}$ tend vers $U_{f(x)}$ quand $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ uniformément dans a, b quelles que soient les fonctions continues $f(x)$, $f_n(x)$. Enfin une fonctionnelle U_f est dite distributive dans C si

$$U_{f_1(x)+f_2(x)} = U_{f_1(x)} + U_{f_2(x)}$$

quelles que soient les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ continues dans (a, b). Une fonctionnelle linéaire est une fonctionnelle distributive et continue.

Il s'agit maintenant d'étendre la définition de Stolz. Pour cela, nous nous inspirerons de la condition imposée par M. Hadamard [1] : la variation d'une fonctionnelle doit être une fonctionnelle linéaire.

Si l'on partait de la définition ordinaire de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, on serait amené à généraliser d'abord la notion de dérivée par-

---

(1) *Leçons sur le Calcul des variations*, p. 288. Hermann, Paris, 1910.

tielle. Et il faudrait considérer une fonctionnelle comme une fonction d'une infinité de variables. Ce point de vue peut être utile dans certaines questions; mais il ne convient pas bien ici, d'autant que le choix de ces variables est très arbitraire.

Il vaut donc mieux partir de la définition de Stolz, et c'est ici que la modification formelle que j'ai indiquée peut rendre des services [celle qui consiste à remplacer le terme $\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2$ par $\varepsilon[|h| + |h_2|]$ ou $\varepsilon\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ ou $\varepsilon \times$ (le plus grand des deux nombres $|h_1|$, $|h_2|$)]. On n'a plus alors aucune peine à formuler la généralisation indiquée.

Nous dirons qu'une fonctionnelle U_f est différentiable pour la valeur $f_0(x)$ de $f(x)$, s'il existe une fonctionnelle linéaire $A_{\Delta f(x)}$ qui représente approximativement

$$U_{f_0+\Delta f} - U_{f_0}$$

près de $f_0(x)$. Ceci signifiera que l'expression

$$U_{f_0+\Delta f} - U_{f_0} - A_{\Delta f}$$

est infiniment petite par rapport à l'écart Δ de

$$f_0(x) + \Delta f(x)$$

et de $f_0(x)$. Si le champ de définition de U_f est celui des fonctions continues dans (a, b) on prendra pour Δ le maximum de Δf dans (a, b); si c'est celui des fonctions de carré sommable, on prendra pour Δ l'expression $\int_a^b [\Delta f(x)]^2 dx$, etc.