NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

Sur les réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 364-374

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__364_1>

[O5k]

SUR LES RÉSEAUX CONJUGUÉS ORTHOGONAUX EN PROJECTION SUR UN PLAN;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE,
Professeur au Lycée de Poitiers.

1. Dans les *Nouvelles Annales* de 1869 (p. 563 et

([1]) Remarque sur certains déterminants numériques (*Bull. Soc. math. de France*, t. XV, 1887).

sous le n° 975), Ribaucour proposa la question suivante : *Étant donnée une surface du second ordre et un plan quelconque, trouver, sur cette surface, un réseau conjugué se projetant, sur le plan donné, suivant un réseau orthogonal.*

Une solution de cette question fut publiée dans les *Nouvelles Annales* de 1872 (p. 177 et suiv.). Le plan donné étant pris pour plan horizontal Oxy, soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation, par rapport à des axes rectangulaires $Oxyz$ (Oz étant vertical), de la surface donnée (S) ; soient p, q, r, s, t les dérivées partielles des deux premiers ordres de la cote z, par rapport à x et à y ; le réseau demandé (C) a pour équation

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dq};$$

il se projette, par suite, horizontalement, suivant les courbes intégrales de l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Pour une quadrique à centre, cette équation différentielle n'est autre que celle des coniques homofocales; de même, pour un paraboloïde, l'équation est celle des paraboles homofocales; pour le cône, on obtient des cercles concentriques et les rayons émanant de leur centre commun. L'Auteur de la solution publiée est amené à envisager le cas d'indétermination de l'équation différentielle: les deux équations aux dérivées partielles du second ordre

$$s = 0, \qquad r - t = 0,$$

sont alors simultanément vérifiées; leur intégrale commune est un paraboloïde de révolution d'axe vertical.

Tout ceci est parfaitement exact. Mais il n'en est pas de même de l'affirmation suivante concernant le cas du paraboloïde de révolution précédent : « le système conjugué demandé se compose des parallèles et des méridiens (ou des lignes de courbure) et se projette sur le plan donné suivant un système de cercles concentriques et de droites passant par le centre commun » (p. 180). Le réseau conjugué, formé par les lignes de courbure, est bien un réseau répondant à la question, puisque le paraboloïde de révolution est une surface moulure très particulière; mais il n'est pas le seul : *tout réseau conjugué du paraboloïde de révolution se projette suivant un réseau orthogonal sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution*, ainsi que je vais l'établir.

2. Dans un article intitulé *Étude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan*, inséré dans le *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai fait une étude générale de ces réseaux, sur une surface quelconque; je me suis principalement placé au point de vue de la théorie de certaines équations linéaires, aux dérivées partielles du second ordre, dont la propriété caractéristique est d'admettre trois solutions telles que la troisième soit la somme des carrés des deux premières ; je me proposais surtout de mettre en évidence l'analogie avec la théorie des lignes de courbure et de déterminer toutes les surfaces qui sont ainsi associées à un réseau orthogonal, donné dans le plan horizontal Oxy. Je vais maintenant développer des considérations d'un ordre plus élémentaire et plus géométrique.

Il s'agit donc de résoudre, pour une surface quelconque (S), le problème que Ribaucour proposa pour les quadriques; je désignerai par (C) les courbes du réseau demandé.

Les deux courbes (C), projetées horizontalement, qui se croisent en un point m du plan Oxy ont nécessairement pour tangentes les axes de symétrie de la conique qui est la projection horizontale de l'indicatrice de la surface (S) au point M dont m est la projection. En d'autres termes, les courbes (C) projetées bissectent les lignes asymptotiques projetées. Ces propriétés sont analogues à celles des lignes de courbure. Elles permettent de former de nouveau l'équation différentielle des courbes (C) projetées : l'indicatrice, en projection horizontale, ayant pour équation

$$r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2=1,$$

l'équation quadratique de ses axes de symétrie est

$$s(Y-y)^2-s(X-x)^2+(r-t)(X-x)(Y-y)=0;$$

de cette équation, découle immédiatement l'équation différentielle précédemment indiquée des projections des courbes (C).

Considérons une quadrique générale; soit (Γ) la conique qui est le contour apparent de cette quadrique sur le plan horizontal Oxy; les projections des asymptotiques sont alors les deux tangentes menées de m à la conique (Γ) : les courbes (C) sont, par conséquent, les coniques homofocales à la conique (Γ).

Ceci a lieu lorsque le contour apparent est une véritable conique; celle-ci peut dégénérer tangentiellement en deux points *autres que les points cycliques* du plan Oxy; elle peut même dégénérer en un point double : c'est alors le cas du cône du second degré et, plus généralement d'ailleurs, d'un cône quelconque ; pour un cône, le réseau projeté se compose de cercles concentriques et de droites émanant de leur centre commun.

Mais, dans le cas singulier où le contour apparent se compose des deux points cycliques, il y a évidemment indétermination ; la quadrique est alors un paraboloïde de révolution d'axe vertical. Toute section plane se projette suivant un cercle ; l'indicatrice se projette donc suivant un cercle et tout réseau conjugué de ce paraboloïde se projette suivant un réseau orthogonal.

3. J'ai écrit plus haut que, dans le cas où la surface (S) est une surface moulure, attachée à un cylindre vertical, le réseau (C), conjugué sur elle et qui se projette horizontalement suivant un réseau orthogonal, est celui des lignes de courbure de la surface moulure.

La propriété réciproque est presque évidente : pour que le réseau (C) soit précisément le réseau des lignes de courbure de la surface (S), il faut que celle-ci soit une moulure quelconque associée à un cylindre vertical.

De même, pour que le réseau conjugué (C) contienne, soit les lignes de niveau, soit les lignes de plus grande pente de (S), il faut et il suffit qu'on se trouve dans le cas, qui précède, d'une surface moulure.

Ces considérations s'appliquent au cas particulier où la surface moulure est une surface de révolution autour d'un axe vertical ; le cas du paraboloïde de révolution étant excepté, le réseau conjugué (C) est alors formé par les parallèles et les méridiens de la surface de révolution.

La notion de parallèles et de méridiens d'une surface de révolution fut généralisée par Minding et étendue à une surface quelconque : les parallèles sont les courbes le long desquelles les normales à la surface font un angle constant avec la direction Oz ; les méridiens sont de même les lignes le long desquelles les normales à la surface se projettent sur Oxy suivant les droites parallèles. En d'autres termes, les parallèles de la surface se projettent suivant les courbes d'équations

$$p^2 + q^2 = \text{const.},$$

et les méridiens, suivant les courbes d'équations

$$\frac{p}{q} = \text{const.}$$

Si l'on impose aux parallèles et aux méridiens la condition d'être conjugués, la surface (S) est nécessairement une moulure. Montrons qu'il en est également ainsi lorsqu'on impose la condition, que le réseau (C) contienne soit les parallèles de la surface (S), soit les méridiens de cette même surface.

Dans le premier cas, on déduit des deux équations

$$p\,dp + q\,dq = 0,$$
$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy},$$

la condition

$$p\,dx + q\,dy = dz = 0 ;$$

celle-ci exprime que les parallèles sont confondus avec les lignes de niveau de la surface (S). Dans le second cas, de même, on déduit de l'équation différentielle des méridiens

$$p\,dq - q\,dp = 0,$$

la relation

$$p\,dy - q\,dx = 0,$$

qui exprime l'identité de ces méridiens et des lignes de plus grande pente de la surface. Dans l'un ou l'autre cas, la surface est donc une surface moulure.

4. Dans le cas d'une surface (S) intégrale de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv r + t = 0,$$

les lignes asymptotiques de cette surface (S) se projettent sur le plan horizontal Oxy suivant un réseau orthogonal. La détermination des lignes conjuguées (C) d'une telle surface est donc identique à la révolution d'un problème de trajectoires obliques, sous l'angle de 45°, dans le plan Oxy. En se reportant alors à la page 92 des *Nouvelles Annales* de février 1909, on voit que, l'équation des asymptotiques pouvant être ramenée à la forme

$$\int \sqrt{\mathrm{U}''}\, du \pm \int \sqrt{\mathrm{V}''}\, dv = \text{const.},$$

celle des courbes (C) est alors

$$\int \sqrt{\mathrm{U}''}\, du \pm i \int \sqrt{\mathrm{V}''}\, dv = \text{const.};$$

les quadratures à effectuer sont les mêmes dans les deux cas.

Plus particulièrement, dans le cas des surfaces d'équations

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = r^{\mathrm{K}} \sin \mathrm{K}(\omega - \omega_0),$$

considérées aux pages 95 et 396 du Tome cité, les projections des courbes (C) sont des spirales sinusoïdes.

5. Le cas particulier où la surface intégrale de l'équation de Laplace est de révolution, c'est-à-dire celui de la surface engendrée par la courbe logarithmique

$$z = \operatorname{Log} r,$$

est à signaler : les asymptotiques sont alors, en projection, les spirales logarithmiques

$$r\,d\omega = \pm\,dr,$$

trajectoires, sous l'angle de 45°, des droites qui émanent de l'origine O ou des cercles de centre O; les courbes (C) sont ces droites et ces cercles puisque la surface est de révolution.

Considérons de même le cas où la surface est un hélicoïde gauche à plan directeur horizontal; soit

$$z = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$$

l'équation de cet hélicoïde (S); c'est une surface intégrale de l'équation de Laplace; ses asymptotiques se projettent sur Oxy suivant les droites émanant de O et suivant les cercles de centre O. Les courbes (C) projetées horizontalement sont nécessairement les spirales logarithmiques

$$r\,d\omega = \pm\,dr.$$

Il y a donc un certain rapprochement à faire entre la surface de révolution précédente et l'hélicoïde gauche à plan directeur. Plus généralement, il y a lieu d'associer deux à deux les surfaces intégrales de l'équation de Laplace. Pour la surface (S_1) d'équation

$$z = U - V,$$

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = i\,\frac{v-u}{2};$$

les asymptotiques et les courbes (C) ont, en projection horizontale, pour équations différentielles respectives,

$$U'' du^2 - V'' dv^2 = 0,$$
$$U'' du^2 + V'' dv^2 = 0;$$

si l'on associe donc à (S_1) la surface (S_2) d'équation

$$z = U + V,$$

les projections des asymptotiques de l'une des surfaces (S_1) *et* (S_2) *sont les projections des courbes* (C) *de l'autre surface, et inversement.*

6. Au paragraphe 5, j'ai été amené à considérer le réseau formé par les cercles concentriques et leurs rayons, et le réseau formé par les spirales logarithmiques

$$r\,d\omega = \pm\,dr.$$

Dans mon article inséré dans le *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai déterminé et défini géométriquement, comme surface diamétrale d'un cône et d'une surface de révolution, la surface la plus générale qui peut être associée au premier de ces réseaux (§ VII de l'article cité). Je vais consacrer la fin du présent article à la détermination de la surface (S) la plus générale, dont le réseau projeté (C) est celui des spirales logarithmiques

$$r\,d\omega = \pm\,dr.$$

En coordonnées ordinaires, cette surface (S) est l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre qu'on obtient en posant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y},$$

dans l'équation différentielle des courbes (C) projetées; cette équation prend la forme

$$\frac{r-t}{s}+\frac{4xy}{x^2-y^2}=0.$$

Il faut donc intégrer ou transformer cette équation. Il est préférable de procéder de la façon suivante :

Partons des équations

$$re^{-\omega}=e^{2u},$$
$$re^{\omega}=e^{2v},$$

des deux familles de spirales logarithmiques; ce réseau orthogonal et isothermique donne à l'élément linéaire du plan la forme

$$ds^2=2e^{2(u+v)}(du^2+dv^2);$$

l'équation linéaire qu'il convient de lui associer est donc

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial v}=0;$$

c'est une équation à invariants égaux, puisque le réseau de spirales est isothermique; on a

$$h=k=1;$$

l'équation est donc réductible à la forme canonique

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial v}=\theta_1.$$

On reconnaît l'une des formes qu'il est possible de donner à *l'équation des télégraphistes*. Ainsi donc *la détermination des surfaces telles que le réseau* (C) *projeté soit celui de l'hélicoïde gauche à plan directeur est réductible à l'intégration de l'équation des télégraphistes.*

En cherchant une solution particulière de la forme

$$\theta = U + V,$$

on obtient l'hélicoïde lui-même. En cherchant une solution particulière de la forme

$$\theta = U \times V,$$

on trouve

$$\theta = e^{Au+Bv}\,\text{const.};$$

A et B sont deux constantes liées par la relation

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 1;$$

on posera donc

$$A = \frac{2}{1+C}, \qquad B = \frac{2}{1-C},$$

C étant une constante arbitraire.

Les surfaces (S), qui correspondent à la solution particulière ainsi déterminée, ont pour équation générale

$$\frac{1-C^2}{2}\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + C\omega;$$

elles rentrent dans la famille des *surfaces spirales* qui ont été signalées par M. A. Buhl dans son Mémoire *Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures* (*Nouvelles Annales*, octobre 1908, § 7); en appliquant les formules de M. Buhl, on trouve pour projections des asymptotiques deux familles de spirales logarithmiques

$$\frac{dr^2}{r^2} + 2C\,d\omega\frac{dr}{r} + d\omega^2 = 0$$

(en écartant le cas singulier $C = i$, pour lequel la surface dégénérerait en un plan imaginaire).