C. SERVAIS

Extension des théorèmes de Frégier aux courbes et aux surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 145-156

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__145_0>

[$M^1 3e$, $M^2 2c$]

EXTENSION DES THÉORÈMES DE FRÉGIER AUX COURBES ET AUX SURFACES ALGÉBRIQUES;

Par M. C. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

1. On joint le sommet M d'un triangle MAB à un point S du côté AB; les droites menées par les sommets A et B, parallèles respectivement aux côtés opposés, rencontrent MS aux points A_1, B_1. On a

$$(a)\qquad \frac{1}{MS} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1}.$$

Soient X le point (AA_1, BB_1), O le milieu de AB, S' le point d'intersection de MS avec la parallèle menée par X au côté AB. On a

$$(A_1 B_1 M S') = (A B O \infty) = -1$$

ou

$$\frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} = \frac{2}{MS'} = \frac{1}{MS}.$$

Soient A_2 le point d'intersection de MS avec la perpendiculaire élevée au point A sur MA; a, b, n les semi-droites MA, MB, MS; on a

$$MA = MA_2 \cos(na), \qquad MA : \sin(bn) = MA_1 : \sin(ba),$$

donc

$$(b)\qquad MA_1 = MA_2 \frac{\cos(na)\sin(ab)}{\sin(nb)}.$$

(1) Fregier, *Annales de Mathématiques de Gergonne*, t. VI, p. 229 et 231; t. VII, p. 91.

2. On joint le sommet M d'un tétraèdre MABC à un point S de la face ABC; les plans α, β, γ menés par les sommets A, B, C respectivement parallèles aux faces opposées rencontrent MS aux points A_1, B_1, C_1; on a

$$(c) \qquad \frac{1}{MS} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}.$$

Soient S', B', C' respectivement les points (BC, AS), (β, MS'), (γ, MS'); S'' le point d'intersection de MS avec la parallèle menée par S' à MA; les droites $B'B_1$, $C'C_1$ sont aussi parallèles à MA. On a, d'après l'égalité (a),

$$\frac{1}{MS'} = \frac{1}{MB'} + \frac{1}{MC'} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{MS''} = \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1},$$

$$\frac{1}{MS} = \frac{1}{MS''} + \frac{1}{MA_1} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}.$$

On désigne par y, z deux semi-droites faisant avec la semi-droite $x \equiv MS$ un trièdre trirectangle; par a, b, c les semi-droites MA, MB, MC; par $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ les cosinus directeurs de a, b, c relativement au trièdre xyz. Le plan α a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - MA.\alpha_1 & y - MA.\beta_1 & z - MA.\gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0;$$

par suite,

$$MA_1 = MA\,\frac{\sin(abc)}{\sin(xbc)}.$$

Le plan mené par A perpendiculairement à MA coupe MS en A_2; on a

$$MA = MA_2.\alpha_1,$$

donc

$$(d) \qquad \frac{1}{MA_1} = \frac{1}{MA_2}\,\frac{\sin(abc)}{\alpha_1}\,\frac{1}{\sin(abc)}.$$

Un cône du second ordre ayant pour trièdre principal xyz a pour équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Le trièdre abc est conjugué à ce cône si l'on a

$$\begin{aligned}
A\alpha_1\alpha_2 + B\beta_1\beta_2 + C\gamma_1\gamma_2 &= 0,\\
A\alpha_1\alpha_3 + B\beta_1\beta_3 + C\gamma_1\gamma_3 &= 0,\\
A\alpha_2\alpha_3 + B\beta_2\beta_3 + C\gamma_2\gamma_3 &= 0.
\end{aligned}$$

De ces égalités on déduit

$$\begin{aligned}
A\alpha_2(\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1) &= B\beta_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3),\\
A\alpha_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) &= C\gamma_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1),
\end{aligned}$$

ou

$$(e)\qquad \frac{\sin(xca)}{\alpha_2} = \frac{A}{B}\,\frac{\sin(yca)}{\beta_2}, \qquad \frac{\sin(xab)}{\alpha_3} = \frac{A}{C}\,\frac{\sin(zab)}{\gamma_3}.$$

Les égalités (e) et leurs analogues donnent

$$(f)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\sin(xbc)}{\sin(ybc)}\,\frac{\beta_1}{\alpha_1} &= \frac{\sin(xca)}{\sin(yca)}\,\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\sin(xab)}{\sin(yab)}\,\frac{\beta_3}{\alpha_3} = \frac{A}{B},\\
\frac{\sin(xbc)}{\sin(zbc)}\,\frac{\gamma_1}{\alpha_1} &= \frac{\sin(xca)}{\sin(zca)}\,\frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \frac{\sin(xab)}{\sin(zab)}\,\frac{\gamma_3}{\alpha_3} = \frac{A}{C}.
\end{aligned}\right.$$

Ces relations constituent pour le trièdre principal du cône la propriété analogue à celle exprimée par la relation

$$\operatorname{tang}(ax)\operatorname{tang}(a'x) = \text{const.}$$

pour le couple rectangulaire xy d'une involution de rayons. On peut écrire ces relations sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(xbc)}{\sin(ybc)}\,\frac{\sin(axz)}{\sin(ayz)} &= \frac{\sin(xca)}{\sin(yca)}\,\frac{\sin(bxz)}{\sin(byz)} = \frac{\sin(xab)}{\sin(yab)}\,\frac{\sin(cxz)}{\sin(cyz)},\\
\frac{\sin(xbc)}{\sin(zbc)}\,\frac{\sin(axy)}{\sin(azy)} &= \frac{\sin(xca)}{\sin(zca)}\,\frac{\sin(bxy)}{\sin(bzy)} = \frac{\sin(xab)}{\sin(zab)}\,\frac{\sin(cxy)}{\sin(czy)}.
\end{aligned}$$

Elle sont alors applicables à deux trièdres conjugués quelconques.

3. *Deux cordes* p, q *issues dun point* M *d'une courbe algébrique d'ordre* n *et conjuguées dans une involution rencontrent la courbe aux points* P_1, P_2, ..., P_{n-1}; Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}. *Les droites* P_1Q_1, P_2Q_2, ..., $P_{n-1}Q_{n-1}$ *déterminent sur la conjuguée* n *de la tangente en* M, *dans l'involution considérée, les points* X_1, X_2, ..., X_{n-1}. *Le conjugué harmonique de* M *relativement au système de points* X *est un point* S *indépendant du couple* pq *choisi dans l'involution.*

Soient A, B les conjugués harmoniques de M relativement aux systèmes de points P, Q. La droite AB est la droite polaire du point M par rapport au système de droites P_1Q_1, P_2Q_2, ..., $P_{n-1}Q_{n-1}$, et le point $S \equiv (n, AB)$ est le conjugué harmonique de M relativement au système de points X_1, X_2, ..., X_{n-1}. Les points A, B appartiennent à la conique polaire du point M relativement à la courbe algébrique considérée et le point S est le pôle de l'involution déterminée sur cette conique par les couples pq. Le point S est donc indépendant du couple choisi pq.

4. *Les parallèles menées par les points* P_1, P_2, ..., P_{n-1}, Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1} *respectivement aux droites* q *et* p *déterminent sur la droite* n *les points* P'_1, P'_2, ..., P'_{n-1}, Q'_1, Q'_2, ..., Q'_{n-1}; *on a*

$$(1) \qquad \frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1},$$

car si les parallèles menées par les points A, B respectivement à q et p coupent la droite n en A' et B', on a

$$\frac{n-1}{MA'} = \sum \frac{1}{MP'_1}, \qquad \frac{n-1}{MB'} = \sum \frac{1}{MQ'_1}.$$

Mais, d'après l'égalité (a), on a

$$\frac{1}{MS} = \frac{1}{MA'} + \frac{1}{MB'},$$

donc

$$\frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1}.$$

Ainsi symétrique de M par rapport au point S est le conjugué harmonique de M relativement au système de points P'_1, P'_2, ..., P'_{n-1}; Q'_1, Q'_2, ..., Q'_{n-1}.

5. *Au point* M *d'une courbe algébrique on mène deux cordes p, q conjuguées dans une involution dont le couple rectangulaire est formé par la tangente et la normale n au point* M. *Si* R *est le rayon de courbure de la courbe au point* M; N_1, N_2, ..., N_{n-1}, *les segments comptés à partir de* M *et déterminés sur la normale n par la courbe considérée;* S *la conjuguée harmonique de* M *par rapport aux points* X_1, X_2, ..., X_{n-1} (3); *on a*

$$(2) \quad \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}} - \frac{n-1}{MS} = \frac{\operatorname{tang}(np)\operatorname{tang}(nq)}{2R}$$

On désigne par P''_1 le point de rencontre de la normale n avec la perpendiculaire élevée au point P_1 sur p. L'égalité (b) permet de remplacer la relation (1) par la suivante :

$$\sin(pq)\frac{n-1}{MS} = \operatorname{tang}(np)\operatorname{tang}(nq)\frac{\cos(nq)}{\sin(np)}\sum\frac{1}{MP''_1} - \frac{\sin(np)}{\cos(nq)}\sum\frac{1}{MQ''_1}.$$

Dans l'involution considérée au point M le produit tang (np). tang (nq) est constant, et si dans la précédente égalité on substitue au couple pq la tangente et la normale au point M, l'un des points $P''_1, P''_2, \ldots, P''_{n-1}$ est l'extrémité du diamètre du cercle osculateur en M et les autres sont à l'infini. Quant aux points Q''_1, $Q''_2, \ldots, Q''_{n-1}$, ce sont les points de rencontre de la normale avec la courbe. On a d'ailleurs dans cette hypothèse

$$\cos(nq) = 1, \qquad \sin(pq) = -\sin(np) = 1,$$

donc

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}} - \frac{n-1}{MS} = \frac{\operatorname{tang}(np)\operatorname{tang}(nq)}{2R}.$$

6. Si N' est le segment déterminé par la conique polaire du point M sur la normale n, R' le rayon de courbure de cette conique en M, on a, d'après la formule (2),

$$\frac{1}{N'} - \frac{1}{MS} = \frac{\operatorname{tang}(np)\operatorname{tang}(nq)}{2R'}.$$

Mais

$$\frac{n-1}{N'} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}},$$

donc

$$R' = (n-1)R.$$

Si R_h représente le rayon de courbure au point M d'une courbe polaire d'ordre $n-h$ de ce point, on a de même

$$R' = (n-h-1)R_h;$$

par suite,

$$\frac{1}{R_h} = \frac{n-h-1}{n-1}\,\frac{1}{R}.$$

Ainsi : *En un point d'une courbe algébrique, les* *courbures des polaires successives de ce point forment une progression arithmétique* ([1]).

7. Si l'involution considérée (pq) est orthogonale on a

$$\frac{n-1}{MS} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}} \quad ([2]).$$

On conclut de là : *Si la conique polaire de* M *est une hyperbole équilatère, on a*

$$\frac{1}{2R} + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}} = 0,$$

car le point S est alors à l'infini. Dans cette hypothèse on a aussi

$$\sum \frac{1}{MP_1''} - \sum \frac{1}{MQ_1'} = 0.$$

8. *Les arêtes a, b, c d'un trièdre ayant son sommet en un point* M *d'une surface algébrique d'ordre n, et conjugué à un cône donné, rencontrent cette surface aux points* P_1, P_2, ... P_{n-1} ; Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1} ; R_1, R_2, ..., R_{n-1}. *Les plans* $P_1 Q_1 R_1$, $P_2 Q_2 R_2$, ..., $P_{n-1} Q_{n-1} R_{n-1}$ *déterminent sur le rayon polaire x du plan tangent en* M, *relativement au cône considéré, les points* X_1, X_2, ..., X_{n-1}. *Le conjugué harmonique de* M *relativement au système de points* X *est un point* S *indépendant du trièdre conjugué choisi.*

([1]) MOUTARD, *Nouv. Ann. de Math.*, 1860, p. 195. — C. SERVAIS, *Bull. Acad. Belgique*, 1891, p. 364.

([2]) PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*, t. II, 1886, n° 362. Cette formule, établie par Poncelet à l'aide d'autres considérations, met en évidence la propriété (3) pour une involution orthogonale et par projection pour une involution quelconque.

Soient A, B, C les conjugués harmoniques de M relativement aux systèmes de points P, Q, R. Le plan ABC est le plan polaire de M par rapport au système de plans $P_1 Q_1 R_1$, $P_2 Q_2 R_2$, ..., $P_{n-1} Q_{n-1} R_{n-1}$ et le point $S \equiv (x, ABC)$ est le conjugué harmonique de M relativement au système de points X_1, X_2, ..., X_{n-1}. Les points A, B, C appartiennent à la quadrique polaire du point M relativement à la surface algébrique considérée; donc, d'après le théorème de Frégier, le point S est indépendant du trièdre conjugué *pqr* choisi.

9. *Les plans menés par les points* $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$, $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$, *parallèles respectivement aux plans* bc, ca, ab *déterminent sur la droite* x *les systèmes de points* P'_1, P'_2, ..., P'_{n-1}, $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{n-1}$, R'_1, R'_2, ..., R'_{n-1} ; *on a*

$$\frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1} + \sum \frac{1}{MR'_1}. \tag{3}$$

Car si les plans menés par A, B, C parallèles respectivement à bc, ca, ab déterminent sur la droite x les points A', B', C', on a

$$\frac{n-1}{MA'} = \sum \frac{1}{MP'_1}, \quad \frac{n-1}{MB'} = \sum \frac{1}{MQ'_1}, \quad \frac{n-1}{MC'} = \sum \frac{1}{MR'_1}.$$

Mais d'après l'égalité (c),

$$\frac{1}{MS} = \frac{1}{MA'} + \frac{1}{MB'} + \frac{1}{MC'},$$

donc

$$\frac{n-1}{MS} = \sum \frac{1}{MP'_1} + \sum \frac{1}{MQ'_1} + \sum \frac{1}{MR'_1}.$$

Ainsi : *Si* MM' = 3 MS, *le point* M' *est le conjugué harmonique de* M *relativement au système de* *points* $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{n-1}, Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{n-1}, R'_1, R'_2, \ldots, R'_n$.

10. *Si* a, b, c *est un trièdre conjugué à un cône dont le trièdre principal est formé par la normale* x *et deux tangentes rectangulaires* y *et* z *au point* M *de la surface*; R, R′ *les rayons de courbure des sections normales* xy, xz *au point* M; $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ *les segments comptés à partir de* M *et déterminés sur la normale* x *par la surface*; S *le conjugué harmonique de* M *par rapport aux points* $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ (8), *on a*

$$\frac{\cos(xa)}{\sin(xbc)}\frac{n-1}{MS} = \frac{\cos(xa)}{\sin(xbc)}\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_{n-1}}\right) + \frac{\cos(ya)}{\sin(ybc)}\frac{1}{2R}+\frac{\cos(za)}{\sin(zbc)}\frac{1}{2R'}.$$

On désigne par P''_1 le point de rencontre de la normale x avec le plan mené par P_1 normalement à la droite a. L'égalité (d) permet de remplacer la relation (3) par la suivante :

$$(n-1)\frac{\sin(abc)}{MS} = \frac{\sin(xbc)}{\alpha_1}\sum\frac{1}{MP''_1}+\frac{\sin(xca)}{\alpha_2}\sum\frac{1}{MQ''_1} + \frac{\sin(xab)}{\alpha_3}\sum\frac{1}{MR''_1}.$$

D'après les égalités (e) cette relation peut s'écrire

$$(n-1)\frac{\sin(abc)}{MS} = \frac{\sin(xbc)}{\alpha_1}\sum\frac{1}{MP''_1}+\frac{A}{B}\frac{\sin(yca)}{\beta_2}\sum\frac{1}{MQ''_1} + \frac{A}{C}\frac{\sin(zab)}{\gamma_3}\sum\frac{1}{MR''_1}.$$

Si dans cette égalité on substitue au trièdre abc le trièdre xyz, l'un des points Q''_1 et l'un des points R''_1 sont les extrémités des diamètres des cercles de courbure des sections xy, xz et les autres points Q'', R'' sont à l'infini. Quant aux points P''_1, P''_2, ... ce sont les points de rencontre de la normale avec la surface. On a d'ailleurs, dans cette hypothèse,

$$\sin(abc) = \sin(xbc) = \sin(yca) = \sin(zab),$$
$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1\,;$$

par suite,

$$\frac{n-1}{MS} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}} + \frac{A}{B}\frac{1}{2R} + \frac{A}{C}\frac{1}{2R'}.$$

En remplaçant $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{C}$ par leurs valeurs (égalités f), on a

$$\frac{\alpha_1}{\sin(xbc)}\frac{n-1}{MS} = \frac{\alpha_1}{\sin(xbc)}\sum\frac{1}{N_1} + \frac{\beta_1}{\sin(ybc)}\frac{1}{2R} + \frac{\gamma_1}{\sin(zbc)}\frac{1}{2R'}.$$

11. Si le trièdre a, b, c est trirectangle on a

$$A = B = C,$$

et l'on a

$$\frac{n-1}{MS} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R'},$$

égalité qu'on peut déduire immédiatement de

$$\frac{n-1}{MS} = \sum\frac{1}{MP'_1} + \sum\frac{1}{MQ'_1} + \sum\frac{1}{MR'_1}.$$

Le cône de sommet M étant isotrope, deux tangentes rectangulaires quelconques et la normale en M à la surface algébrique forment un trièdre conjugué à ce cône. De là l'égalité connue

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.}$$

En particulier, si R_1, R_2 sont les rayons de courbure principaux, on a

$$\frac{n-1}{MS}=\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_{n-1}}+\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R_2}.$$

Corollaires. — *Si au point* M *la courbure moyenne est nulle, on a*

$$\frac{n-1}{MS}=\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_{n-1}}.$$

Si la quadrique polaire de M *est un hyperboloïde équilatère, on a*

$$\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R_2}+\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_{n-1}}=0.$$

12. *Si les points* S_1, S_2 *sont les points* S (3) *relatifs au point* M *pour deux sections normales de la surface en* M *et perpendiculaires entre elles, on a*

$$\frac{1}{MS_1}+\frac{1}{MS_2}=\text{const.}$$

Car, soient R et R′ les rayons de courbure au point M de ces sections, on a (7, 11)

$$\frac{n-1}{MS_1}=\frac{1}{2R}+\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_{n-1}},$$

$$\frac{n-1}{MS_2}=\frac{1}{2R'}+\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_{n-1}},$$

$$\frac{n-1}{MS}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R'}+\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_{n-1}};$$

donc

$$\frac{n-1}{MS_1}+\frac{n-1}{MS_2}=\frac{n-1}{MS}+\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\ldots+\frac{1}{N_{n-1}}=\text{const.}$$

Corollaires. — *Le point* S *relatif au point* M *pour la section normale à une tangente inflexion-*

nelle de la surface en M *est identique au point* S *relatif au point* M *pour la surface.*

Car si $R' = \infty$, on a

$$\frac{n-1}{MS_2} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \ldots + \frac{1}{N_{n-1}},$$

et, par suite,

$$MS_1 = MS.$$

Si la courbure moyenne est nulle au point M, *on a*

$$\frac{1}{MS_1} + \frac{1}{MS_2} = \frac{2}{MS}.$$