NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WILLIGENS

Sur les polynômes $U_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \frac{\partial^{m+n} (x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 97-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__97_0>

[D1d]

SUR LES POLYNOMES

$$U_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n}m!n!}\frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n};$$

PAR M. WILLIGENS.

Dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de 1865, sous le titre : *Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables*, Hermite donne une forme particulière à la série de Lagrange étendue au cas de plusieurs variables. Entre autres, Hermite applique son développement à l'expression

$$[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)+2abxy+b^2(1-x^2)]^{-\frac{1}{2}},$$

et il trouve comme terme général de son développement

$$\frac{a^m b^n}{2^{m+n}m!\,n!}\frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n},$$

et il désigne par la notation $U_{m,n}$ le coefficient de $a^m b^n$. Hermite montre dans son Mémoire que ces expressions présentent des propriétés analogues à celles des polynomes de Legendre.

Dans un article publié dans *Grunerts Archiv für Mathematik und Physik* (¹), M. Appell propose d'étudier les courbes représentées par $U_{m,n}=0$ au point de vue du nombre maximum de points d'intersection réels que ces courbes peuvent avoir avec une droite.

(¹) APPELL, *Grunerts Archiv.*, 3ᵉ série, t. II, 1902, p. 20.

Ce sujet fut abordé par M. W. Tramm dans sa dissertation inaugurale ([1]).

Le travail qui suit a pour but d'étendre les résultats d'Hermite et de Tramm.

Théorème. — *Si l'un des indices m ou n de* $U_{m,n} = 0$ *est nul, la courbe représentée par cette équation se compose d'un certain nombre d'ellipses. Ces ellipses admettent les axes de coordonnées pour axes de symétrie : le demi grand axe a pour mesure l'unité; le demi petit axe, une des racines positives ou nulles du polynome de Legendre correspondant à l'indice non nul.*

Soit $n = 0$, $(x^2 + y^2 - 1)^m$ est homogène en x et en $1 - y^2$. Il en sera de même pour $\dfrac{\partial^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{\partial x^m}$. Si m est impair on pourra mettre x en facteur et l'on aura comme second facteur un polynome homogène en x^2 et $1 - y^2$. Si m est pair l'expression est homogène en x^2 et $1 - y^2$. Des polynomes de cette forme peuvent se décomposer en facteurs linéaires de la forme

$$x^2 - p^2(1 - y^2).$$

Posons

$$x = p\sqrt{1 - y^2},$$

p étant considéré comme variable et y comme constante.

$$\frac{\partial^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{\partial x^m} = (1 - y^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m (p^2 - 1)^m}{dp^m};$$

([1]) Tramm, *Geometrische Diskussion des Hermite'schen Polynoms :*

$$U_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n}\, m!\, n!} \frac{\partial^{m+n} (x^2 + y^2 - 1)^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n},$$

Zurich, Buchdruckerei Gebr. Leemann und C°, 1908.

en égalant à zéro on obtient

$$\frac{d^m(p^2-1)^m}{dp^m}=0.$$

Si m est impair, l'une des racines est $p=0$; on obtient une ellipse aplatie confondue avec Oy, que l'on peut considérer comme correspondant au facteur x de

$$\frac{\partial^m(x^2+y^2-1)^m}{\partial x^m}=0.$$

En égalant l'un des facteurs à zéro, on a

$$\frac{x^2}{p^2}+y^2-1=0 \qquad (p<1),$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque. — Les remarques qui précèdent ne s'appliquent pas seulement au cas où l'indice de dérivation est égal à l'exposant. En effet $(x^2+y^2-1)^{m+n}$ est homogène en x et $1-y^2$. Si nous dérivons k fois par rapport à x, il en sera de même dans l'expression obtenue, et tous les termes auront même parité, pour l'exposant de x. On pourra, si cet exposant est impair, mettre x en facteur. Le polynome se décomposera alors en facteurs de la forme

$$x^2-p^2(1-y^2).$$

En posant $x=p\sqrt{1-y^2}$, il vient

$$\frac{\partial^k(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^k}=\frac{(1-y^2)^{m+n}}{(1-y^2)^{\frac{k}{2}}}\frac{d^k(p^2-1)^{m+n}}{dp^k}=0;$$

si $m+n-1>k$, $p=1$ est racine multiple, toutes les autres racines étant simples, et le cercle de rayon 1 fait plusieurs fois partie de la courbe.

Remarque. — Considérons

$$U_{m,1} = \frac{1}{2^{m+1}m!}\frac{\partial^{m+1}(x^2+y^2-1)^{m+1}}{\partial x^m\,\partial y},$$

effectuons la dérivation par rapport à y :

$$U_{m,1} = \frac{2(m+1)y}{2^{m+1}m!}\frac{\partial^m(x^2+y^2-1)^m}{\partial x^m}$$

$$= \frac{(m+1)y}{2^m m!}\frac{\partial^m(x^2+y^2-1)^m}{\partial x^m},$$

$$U_{m,1} = (m+1)y\,U_{m,0}.$$

La courbe se composera donc d'un axe et d'une série d'ellipses définies par le théorème ci-dessus.

Pour étudier l'allure générale des courbes représentées par $U_{m,n} = 0$, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME. — *La suite des polynomes*

$$\frac{d^m(x^2-1)^k}{dx^m}, \quad \frac{d^m(x^2-1)^{k-1}}{dx^m}, \quad \frac{d^m(x^2-1)^{k-2}}{dx^m}, \quad \ldots$$

forme une suite de Sturm, l'indice de dérivation restant invariable et l'exposant entier et positif décroissant jusqu'à ce que le polynome soit de degré un ou zéro, pourvu que x reste compris entre o *et* 1, *ces limites étant exclues.*

Désignons par P_0, P_1, P_2, ... les polynomes de cette suite ordonnés par ordre d'exposants décroissants. Ils formeront une suite de Sturm dans l'intervalle donné, si les conditions suivantes y sont vérifiées :

1° Toutes les fonctions de la suite sont continues;

2° La dernière fonction de la suite garde un signe constant dans l'intervalle;

3° La première fonction P_0 n'admet que des racines simples dans l'intervalle considéré;

4° Deux fonctions consécutives ne s'annulent pas simultanément;

5° P_r étant une fonction quelconque de la suite autre que la première ou la dernière, si $P_r = 0$, P_{r-1} et P_{r+1} prennent des valeurs de signes contraires;

6° x traversant en croissant une racine de $P_0 = 0$, le rapport $\frac{P_0}{P_1}$ passe du négatif au positif.

Ces conditions étant réalisées, le nombre de variations de signe perdues par la suite, x passant de la valeur x_0 à la valeur x_1, $0 < x_0 < x_1 < 1$ est égal au nombre des racines de P_0 comprises entre x_0 et x_1.

1° La condition de continuité est remplie, puisque nous considérons des polynomes entiers.

2° La dernière fonction de la suite garde un signe invariable, car elle est soit une constante, soit x multiplié par une constante, et dans ce dernier cas son signe est invariable entre zéro et un.

3° P_0 n'admet que des racines simples dans l'intervalle, car $x = \pm 1$ sont les seules racines multiples possibles et elles sont exclues de l'intervalle. Les autres racines sont simples, comme il ressort du théorème de Rolle.

4° Rendons $P_r = \frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m}$ homogène et appliquons le théorème d'Euler.

En égalant à 1 la variable d'homogénéité, on a

$$(2p-m)\frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m} = x\frac{d^{m+1}(x^2-1)^p}{dx^{m+1}} - 2p\frac{d^m(x^2-1)^{p-1}}{dx^m}$$

ou bien

$$(\alpha)\quad (2p-m)P_r = x\frac{dP_r}{dx} - 2pP_{r+1} \qquad (p = k-r).$$

Si $P_r = 0$ et $P_{r+1} = 0$ on aurait $\frac{dP_r}{dx} = 0$, ce qui est impossible, P_r n'admettant que des racines simples entre o et 1.

5° Soient x_1, x_2, x_3, ... les zéros de $P_r = 0$ par ordre croissant. Donnons à x, dans la formule (α), deux valeurs consécutives de cette suite x_i et x_{i+1} :

$$\begin{array}{c|c} P_r(x_i) = 0, & P_r(x_{i+1}) = 0, \\ x_i \dfrac{d\,P_r(x_i)}{dx_i} = 2p\,P_{r+1}(x_i), & x_{i+1}\dfrac{d\,P_r(x_{i+1})}{dx_{i+1}} = 2p\,P_{r+1}(x_{i+1}); \end{array}$$

or, entre x_i et x_{i+1}, $\dfrac{dP_r}{dx}$ s'est annulé une seule fois en changeant de signe, puisque toutes les racines de $P_r = 0$ sont réelles et qu'elles sont simples entre -1 et $+1$; donc P_{r+1}, prenant des valeurs de signes contraires pour x_i et x_{i+1}, s'est annulé dans l'intervalle.

Deux racines de P_r comprennent un nombre impair de racines de P_{r+1}.

Étudions l'intervalle $(+\varepsilon, x_1)$, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on voudra.

Pour $x = \varepsilon$, P_r et P_{r+1} auront le signe de leur terme de plus bas degré

$$(x^2-1)^p = (-1)^p + \frac{p}{1}(-1)^{p-1}x^2 + \frac{p(p-1)}{1.2}(-1)^{p-2}(x^2)^2 + \ldots,$$

$$(x^2-1)^{p-1} = (-1)^{p-1} + \frac{p-1}{1}(-1)^{p-2}x^2 + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(-1)^{p-3}(x^2)^2 + \ldots.$$

Les termes de même rang sont de signes contraires pour $x > 0$. En dérivant m fois pour former P_r et P_{r+1}, nous supprimons le même nombre de termes des deux développements, ceux dont le degré en x est inférieur à m. Les termes de plus bas degré de P_r et P_{r+1} seront donc de signes contraires pour $x = +\varepsilon$.

Si m impair, $P_r = \frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m}$ s'annule pour $x=0$; donc $\frac{dP_r}{dx}=0$ admet une racine entre 0 et x_1. Le terme de plus bas degré de P_r est du premier degré, celui de $\frac{dP_r}{dx}$ sera la dérivée de ce terme dans P_r.

P_r et $\frac{dP_r}{dx}$ sont donc de même signe pour $x=+\varepsilon$; ils seront donc de signes contraires pour $x_1-\varepsilon$, $\frac{dP_r}{dx}$ s'annulant dans l'intervalle.

Si m pair, P_r s'annule pour $x=-x_1$ et $x=x_1$, qui sont deux racines consécutives, $\frac{dP_r}{dx}=0$ pour $x=0$ entre ces deux racines. Le terme de plus bas degré de P_r est une constante; le terme de plus bas degré de $\frac{dP_r}{dx}$ proviendra du terme en x^2 de P_r et par suite P_r et $\frac{dP_r}{dx}$ seront de signes contraires pour $x=+\varepsilon$. Comme aucune de ces fonctions ne s'annule entre 0 et x_1, P_r et $\frac{dP_r}{dx}$ seront de signes contraires pour $x_1-\varepsilon$.

Désignons par sign P_r le signe de P_r et par $-$ sign P_r le signe contraire. Nous pouvons résumer ces résultats dans les Tableaux qui suivent. Le signe indiqué dans le Tableau sera celui du terme correspondant de la formule écrite au-dessus sans tenir compte du signe qui le précède dans cette formule :

$$\begin{array}{c|c|c|l}
(2p-m)P_r & = x\dfrac{dP_r}{dx} & -2pP_{r+1} & \\
\operatorname{sign} P_r & -\operatorname{sign} P_r & -\operatorname{sign} P_r & \left.\begin{array}{l} x=+\varepsilon \\ x=x_1-\varepsilon \end{array}\right\} m \text{ pair,} \\
\operatorname{sign} P_r & -\operatorname{sign} P_r & -\operatorname{sign} P_r & \\
\\
\operatorname{sign} P_r & \operatorname{sign} P_r & -\operatorname{sign} P_r & \left.\begin{array}{l} x=+\varepsilon \\ x=x_1-\varepsilon \end{array}\right\} m \text{ impair.} \\
\operatorname{sign} P_r & -\operatorname{sign} P_r & -\operatorname{sign} P_r &
\end{array}$$

Dans le voisinage de zéro, P_r et P_{r+1} sont toujours de signes contraires. En isolant P_{r+1} dans le second membre, connaissant le signe de $\frac{dP_r}{dx}$, on en déduit facilement sign P_{r+1} pour $x = x_1 - \varepsilon$.

On voit qu'en tout cas P_{r+1} ne peut admettre qu'un nombre pair de racines entre 0 et x_1.

Désignons par x_e la dernière racine de P_r inférieure à $+1$. P_r est divisible par $(x^2-1)^{p-m}$ et $\frac{dP_r}{dx}$ et P_{r+1} sont divisibles par $(x^2-1)^{p-m-1}$ si $p > m$.

Divisons les deux membres de la formule (α) par $(x^2-1)^{p-m-1}$:

$$\frac{(2p-m)P_r}{(x^2-1)^{p-m-1}} = \frac{x\frac{dP_r}{dx}}{(x^2-1)^{p-m-1}} - 2p\frac{P_{r+1}}{(x^2-1)^{p-m-1}};$$

pour $x=1$ le premier membre s'annule, les deux termes du second membre deviennent égaux.

Pour $x = x_e$ et pour $x = 1$, on a donc

$$\frac{x\frac{dP_r}{dx}}{(x^2-1)^{p-m-1}} = \frac{2pP_{r+1}}{(x^2-1)^{p-m-1}}.$$

Or, dans l'intervalle, $\frac{dP_r}{dx}$ s'est annulé une fois; par suite P_{r+1} s'est annulé en changeant de signe.

$$P_r = \frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m} \qquad \text{est de degré } p-m,$$

$$P_{r+1} = \frac{d^m(x^2-1)^{p-1}}{dx^m} \qquad \text{est de degré } p-m-2.$$

Si P_{r+1} admet une racine après chaque racine positive de P_r et une avant chaque racine négative de P_r autres que $+1$ et -1, nous aurons pour P_{r+1}

$$2p-m-2(p-m) = m,$$

racines autres que $+1$ et -1, car il y a en tout $2p-m$ racines de P_r et ± 1 sont chacune de degré $p-m$ de multiplicité.

P_{r+1} admet ± 1 avec le degré de multiplicité

$$p-m-1;$$

nous aurons donc pour P_{r+1} un nombre de racines égal à

$$m+2(p-m-1)=2p-m-2;$$

ce nombre est précisément le degré.

Les racines positives simples de $P_{r+1}=0$ séparent les racines positives de $P_r=0$.

Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots$ les racines positives de $P_r=0$ et $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$ celles de $P_{r+1}=0$, on a

$$0<x_1<x'_1<x_2<x'_2<\ldots<x_e<x'_e<1;$$

entre 0 et x_1, P_r et P_{r+1} sont de signes contraires; entre x_1 et x'_1 de même signe.

Avant une racine de P_r et dans son voisinage, P_r et P_{r+1} sont de signes contraires.

Du même raisonnement il résulte que P_{r-1} et P_r sont de même signe, donc la condition 5° est vérifiée.

6° Considérons en particulier P_0 et P_1 immédiatement avant une racine de P_0; P_0 et P_1 sont de signes contraires, le rapport $\frac{P_0}{P_1}$ passera donc du négatif au positif lorsque x traverse cette racine.

Les polynomes forment donc bien une suite de Sturm entre $+\varepsilon$ et $1-\varepsilon$.

Proposons-nous maintenant d'étudier la fonction y définie par $U_{m,n}=0$. Partons pour cela de l'expression

$$Q_0=\frac{\partial^m(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m}=(x^2+y^2-1)^n R_0=0$$

$$(R_0\neq 0 \quad \text{si} \quad x^2+y^2-1=0).$$

Nous avons vu que la courbe $R_0 = 0$ se composait d'ellipses dont le grand axe est Oy, dont le centre est à l'origine et dont la longueur du demi grand axe est l'unité.

Les conditions suivantes sont évidemment vérifiées :

1° Pour $x = + \varepsilon$ toutes les racines de $Q_0(y) = 0$ sont réelles et comprises entre $-\sqrt{1-\varepsilon^2}$ et $+\sqrt{1+\varepsilon^2}$, un certain nombre de racines pouvant être confondues avec ces limites, mais toutes les autres étant simples.

2° La courbe $Q_0(x, y) = 0$ n'admet de points multiples que sur $x^2 + y^2 - 1 = 0$, qui en ce cas est ligne de points multiples.

3° La courbe $Q_0(x, y) = 0$ n'admet de points à tangente parallèle à Oy que sur Ox.

Si de telles propriétés ont été démontrées pour

$$Q_k = \frac{\partial^{m+k}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m \, \partial y^k} = 0,$$

elles subsistent pour la courbe

$$Q_{k+1} = \frac{\partial Q_k}{\partial y} = 0.$$

En effet, pour $x = + \varepsilon$, toutes les racines de

$$Q_k(y) = 0$$

sont réelles et celles de $\dfrac{\partial Q_k}{\partial y} = 0$ le seront également et seront séparées par les racines de $Q_k(y) = 0$.

Soient $y_1, y_2, y_3, \ldots$ les racines positives de $Q_k = 0$; $y'_1, y'_2, y'_3, \ldots$ celles de Q_{k+1}; $y = 0$ est racine soit de $Q_k = 0$, soit de $Q_{k+1} = 0$, et nous la désignerons par y_0 ou y'_0 suivant qu'elle sera racine de $Q_k = 0$ ou de $Q_{k+1} = 0$.

$$y_0 < y'_1 < y_1 < y'_2 < y_2 < \ldots \qquad \text{si } k \text{ impair,}$$
$$y'_0 < y_1 < y'_1 < y_2 < y'_2 < \ldots \qquad \text{si } k \text{ pair.}$$

Dans le voisinage de $x = \varepsilon$ les valeurs de y sont des fonctions continues et uniformes de x à cause de la condition 3°.

Supposons que deux racines y'_r et y'_{r+1} deviennent égales pour $x = x'$, on aura dans le voisinage

$$y'_r < y_r \quad < y'_{r+1} \qquad (k \text{ impair}),$$

ou

$$y'_r < y_{r+1} < y'_{r+1} \qquad (k \text{ pair});$$

pour $x = x'$ on aurait alors

$$y'_r = y_r \quad = y'_{r+1}$$

ou

$$y'_r = y_{r+1} = y'_{r+1}.$$

Q_k et $\frac{\partial Q_k}{\partial y}$ auraient une racine commune, ce qui est impossible en vertu de la condition 2°, puisque nous avons supposé qu'il y avait inégalité dans le voisinage de $x = x'$, ce qui exclut les points de $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Cela ne pourra donc avoir lieu que si $y'_r = -y'_r$ lorsque toutes les racines y et y' qui étaient comprises primitivement entre ces deux ont pris des valeurs imaginaires. Cela devra donc se produire d'abord pour y'_1 et $-y'_1$.

Le développement de Q_{k+1} est de la forme

$$Q_{k+1} \equiv a_0 \frac{d^m (x^2 - 1)^r}{dx^m}$$
$$+ a_1 y^2 \frac{d^m (x^2 - 1)^{r-1}}{dx^m} + a_2 y^4 \frac{d^m (x^2 - 1)^{r-2}}{dx^m} + \ldots = 0$$

si $k + 1$ est pair; si $k + 1$ est impair on a une expression de cette forme multipliée par y; a_0, a_1, a_2, ... sont des nombres positifs.

Pour $x = \varepsilon$, l'équation obtenue, en supprimant s'il y a lieu le facteur y, ne présente que des variations de signe dans la suite des coefficients, car toutes les racines de l'équation en y étant réelles, celles de l'équation en y^2 seront positives.

Or la suite de ces coefficients n'est autre que la suite de Sturm étudiée.

La racine $y_1'^2$ doit s'annuler la première, x allant en croissant. Ceci se produit pour la plus petite racine positive de

$$\frac{d^m(x^2-1)^r}{dx^m} = 0;$$

au delà de cette valeur x_1 la suite de Sturm formée par les coefficients perd une variation. Les racines y_1' et $-y_1'$ prennent des valeurs imaginaires conjuguées, la racine $y_1'^2$ est devenue négative, car y_1' et $-y_1'$ étant des valeurs conjuguées doivent être imaginaires pures. Cette racine y'^2 ne peut redevenir positive puisque la suite des coefficients de l'équation vient de perdre une variation, que le nombre des variations restantes est égal au nombre des racines positives en y^2 et que l'on ne peut que perdre des variations dans la suite de Sturm.

Pour $x = x_2$, $\dfrac{d^m(x^2-1)^r}{dx^m} = 0$ une seconde fois, x allant en croissant. La suite des coefficients perd une seconde variation.

L'équation en y^2 perd donc une racine positive qui devient négative pour $x > x_2$. Cette racine ne peut redevenir positive, puisqu'on ne peut regagner de variations. On peut continuer ce raisonnement de proche en proche. Les valeurs réelles de y sont toujours comprises entre $-\sqrt{1-x^2}$ et $+\sqrt{1-x^2}$; la suite des coefficients ne présente plus de variations pour $x > 1$, la courbe est donc entièrement située à l'intérieur du cercle $x^2+y^2-1=0$. Ceci est vrai en particulier pour $k=n$ et par conséquent pour

$$\frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n}=0.$$

En calculant successivement $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, on trouve pour terme indépendant de y

$$\frac{d^m(x^2-1)^{m+n-s}}{dx^m} \quad \text{si} \quad n=2s,$$

et pour terme en y

$$y\,\frac{d^m(x^2-1)^{m+n-s}}{dx^m} \quad \text{si} \quad n=2s-1$$

à un facteur constant près.

$x=\pm 1$ sont donc des zéros d'ordre $n-s$ de ces expressions. La courbe peut donc présenter un point multiple en ces points de Ox.

Transportons l'origine au point $x=-1$, $y=0$. La courbe étant symétrique par rapport aux axes de coordonnées, l'étude faite pour les valeurs positives de x s'applique immédiatement au cas de x négatif.

$$Q_n=\frac{\partial^{m+n}[y^2+x(x-2)]^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n},$$

$$\begin{aligned}
&[(y^2-2x)+x^2]^{m+n}\\
&\quad=(y^2-2x)^{m+n}+\frac{m+n}{1}x^2(y^2-2x)^{m+n-1}+\ldots\\
&\qquad+\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-p+1)}{p!}\\
&\qquad\quad\times x^{2p}(y^2-2x)^{m+n-p}+\ldots;
\end{aligned}$$

en dérivant m fois en x on obtient comme terme général

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}[x^{2p}(y^2-2x)^{m+n-p}]$$
$$= x^{2p}(y^2-2x)^{n-p}(-2)^m(m+n-p)\dots(n-p+1)2p$$
$$+ \frac{m}{1}x^{2p-1}(y^2-2x)^{n-p-1}$$
$$\times(-2)^{m-1}(m+n-p)\dots(n-p+2)2p(2p+1)$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}x^{2p-2}(y^2-2x)^{n-p-2}$$
$$\times(-2)^{m-2}(m+n-p)\dots(n-p+3)$$
$$\times 2p(2p-1)(2p-2)$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ 2p!(y^2-2x)^{n+p}(-2)^{2p}.$$

Faisons la substitution

$$y = t\sqrt{x},$$

en remarquant que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dans le développement ci-dessus nous aurons x^{n+p} en facteur. Il vient

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}[x^{2p}(y^2-2x)^{m+n-p}]$$
$$= x^{n+p}[(t^2-2)^{n-p}(-2)^m(m+n-p)\dots(n-p+1)]+\dots$$
$$+ 2p!(t^2-2)^{n+p}(-2)^{2p}];$$

dérivons n fois par rapport à y, ou, ce qui revient au même, par rapport à t en multipliant par $\frac{1}{x^{\frac{n}{2}}}$

$$\frac{\partial^{m+n}[x^{2p}(y^2-2x)^{m+n-p}]}{\partial x^m\,\partial y^n}$$
$$= \frac{x^{n+p}}{x^{\frac{n}{2}}}[(t^2-2)^{n-p}(-2)^m(m+n-p)\dots(n-p+1)+\dots$$
$$+ 2p!(t^2-2)^{n+p}(-2)^{2p}]^{(n)}$$
$$(p = 0, 1, 2, \dots),$$

l'indice (n) indiquant les n dérivations par rapport à t à l'intérieur du crochet.

Après la substitution nous pouvons mettre $x^{\frac{n}{2}}$ en facteur dans l'équation $Q_n = 0$. Supprimons ce facteur et posons $x = 0$, nous obtiendrons des termes en t qui proviennent du cas où $p = 0$ dans la dernière formule. Ce sont les termes provenant de

$$(y^2 - 2x)^{m+n};$$

on a en effet

$$\frac{\partial^{m+n}(y^2 - 2x)^{m+n}}{\partial x^m \, \partial y^n}$$
$$= (m+n)(m+n-1)\ldots(n+1)(-2)^m \frac{\partial^n (y^2 - 2x)^n}{\partial y^n}.$$

Faisons la substitution $y = t\sqrt{x}$;

$$\frac{\partial^n (y^2 - 2x)^n}{\partial y^n} = \frac{x^n}{x^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^n (t^2 - 2)^n}{\partial t^n} = x^{\frac{n}{2}} \frac{d^n (t^2 - 2)^n}{dt^n},$$

$$\frac{d^n (t^2 - 2)^n}{dt^n} = 0$$

est l'équation définissant la décomposition en cycles dans le voisinage du point $x = 0$, $y = 0$. On a donc dans le voisinage de ce point $y = t\sqrt{x}$, t étant une série entière en x prenant pour $x = 0$ la valeur d'une racine de l'équation en t.

La surface de Riemann de la fonction $U_{m,n} = 0$ présente donc dans le voisinage de $x = -1$, $y = 0$ une série de points de ramification simples. La racine $t = 0$ que l'on obtient dans le cas de n impair, correspond à l'axe Ox qui dans ce cas fait partie de la courbe.

Posons $t = \theta\sqrt{2}$,

$$\frac{d^n (t^2 - 2)^n}{dt^n} = \frac{2^n}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{d^n (\theta^2 - 1)^n}{d\theta^n} = 0.$$

La décomposition en systèmes circulaires dépend donc de la recherche des racines d'un polynome de Legendre.

x tendant vers zéro, on a

$$\frac{y}{x} = \frac{t}{\sqrt{x}},$$

et la série t prenant une valeur finie pour $x = 0$, il en résulte que toutes les branches de courbe ont une tangente commune parallèle à Oy.

Si $n = 2s$ ou $n = 2s - 1$, le point multiple est d'ordre s.

Le point $x = 0$, $y = -1$ est un point multiple d'ordre r si $m = 2r$ ou $m = 2r - 1$. On aurait

$$x = g\sqrt{y},$$

g représentant une série entière en y prenant pour $y = 0$ la valeur d'une racine non nulle de

$$\frac{d^m(g^2 - 2)^m}{dg^n} = 0$$

en supposant l'origine transportée en ce point.

Il en résulte donc que y est développable en série suivant les puissances de x^2, comme l'indique la théorie des fonctions inverses. Le point $x = 0$, $y = -1$ n'est donc pas un point de ramification de la fonction algébrique $U_{m,n}(x, y) = 0$.

Une racine y'_i est réelle pour $x = +\varepsilon$ et nulle pour $x = x_i$. On a donc

$$\begin{array}{l} y'_i(\varepsilon) - m\varepsilon > 0 \\ y'_i(x_i) - mx_i < 0 \end{array} \qquad (m > 0).$$

On a donc pour chaque branche de courbe un point d'intersection avec une droite du premier quadrant passant par l'origine. En tenant compte de ce que les axes peuvent faire partie de la courbe, on trouve que la courbe peut avoir $(m+n)$ points d'intersection réels avec une droite.

La courbe est donc située à l'intérieur du cercle de rayon 1, sauf si les axes de coordonnées en font partie. Elle se compose d'une série de branches enveloppant l'origine et s'enveloppant mutuellement. Elle ne peut admettre de points multiples réels que pour $x=0$, $y=\pm 1$ et $x=\pm 1$, $y=0$.

Posons

$$m+n=p.$$

On vérifie facilement, comme le montre M. Tramm [1], que l'on ne peut obtenir de point multiple sur Ox que pour

$$m \leqq p-4,$$

et sur Oy que pour

$$n \leqq p-4,$$

par conséquent si

$$m+n \leqq 2p-8$$

ou

$$p \geqq 8,$$

pour avoir des points singuliers sur les deux axes.

Ces résultats sont confirmés par l'étude des équations développées. La Thèse de M. Tramm contient un Tableau complet de ces équations pour toutes les valeurs jusqu'à

$$p=m+n=10.$$

Exemple. — Construisons par exemple la courbe

$$U_{3,4}=0.$$

---

[1] TRAMM, *Dissertation*, p. 24 et suiv.

L'équation développée est (TRAMM, p. 12)

$$x[3^2.7y^6 + 5.7y^4(5x^2 - 3) + 3.5y^2(x^2 - 1)(7x^2 - 3) + (x^2 - 1)^2(9x^2 - 3)] = 0.$$

Nous voyons que l'axe Oy fait partie de la courbe.

Les coefficients de l'équation en y^2 sont, à des facteurs constants près,

$$(x^2 - 1)^2(9x^2 - 3), \quad (x^2 - 1)(7x^2 - 3), \quad (5x^2 - 3), \quad 1.$$

Leurs racines positives autres que 1 sont

$$\sqrt{\frac{3}{9}}, \quad \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \sqrt{\frac{3}{5}},$$

x prenant une valeur voisine de zéro. On voit que la suite des coefficients ne présente que des variations, et qu'elle en perd une seulement lorsque x croissant prend la valeur $\sqrt{\frac{3}{9}}$.

Ils forment donc bien une suite de Sturm, ainsi qu'il a été montré dans le cas général.

On voit de plus que pour $y = 0$, $x = \pm 1$ sont des racines doubles. Dans ce cas nous aurons donc deux points doubles sur Ox.

La courbe a l'aspect indiqué par la figure.

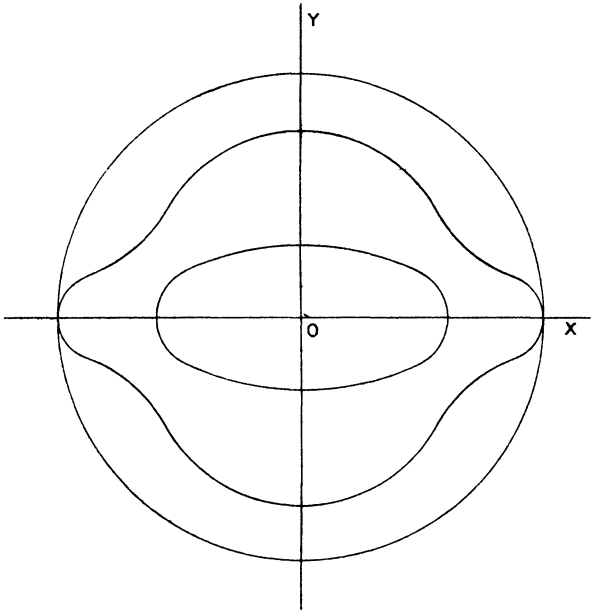
Nous avons

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 - 1)^7 = y^{14} + {} & 7y^{12}(x^2 - 1) + 21y^{10}(x^2 - 1)^2 \\ & + 35y^8(x^2 - 1)^3 + 35y^6(x^2 - 1)^4 \\ & + 21y^4(x^2 - 1)^5 + 7y^2(x^2 - 1)^6 \\ & + (x^2 - 1)^7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3(x^2 + y^2 - 1)^7}{dx^3} = {} & 21y^{10}\frac{d^3(x^2 - 1)^2}{dx^3} + 35y^8\frac{d^3(x^2 - 1)^3}{dx^3} \\ & + 35y^6\frac{d^3(x^2 - 1)^4}{dx^3} + 21y^4\frac{d^3(x^2 - 1)^5}{dx^3} \\ & + 7y^2\frac{d^3(x^2 - 1)^6}{dx^3} + \frac{d^3(x^2 - 1)^7}{dx^3} = 0;\end{aligned}$$

cette dernière équation représente quatre fois le cercle $x^2+y^2-1=0$, l'ellipse $\dfrac{x^2}{\frac{3}{13}}+y^2-1=0$ et l'axe Oy.

Si nous la dérivons en y, nous pouvons, pour une



valeur donnée de x entre zéro et 1, dire un nombre de racines qui sont certainement réelles.

Dérivons quatre fois en y.

$$\frac{\partial^7(x^2+y^2-1)^7}{\partial x^3\,\partial y^4}$$

$$= 21.10.9.8.7y^6\frac{d^3(x^2-1)^2}{dx^3}+35.8.7.6.5y^4\frac{d^3(x^2-1)^3}{dx^3}$$

$$+35.\;6.5.4.3y^2\frac{d^3(x^2-1)^4}{dx^3}+21.4.3.2.1\quad\frac{d^3(x^2-1)^5}{dx^3}=0.$$

pour x positif et très petit, toutes les racines en y sont réelles. La branche de courbe qui correspond à la racine que nous avons désignée par y'_1 vient couper Ox pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, les autres branches correspondant à des valeurs positives de y vont passer par le point

$$x = +1.$$

L'équation de la courbe dans ce cas a la forme qui a été utilisée dans l'étude du cas général.