NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 140-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__140_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Déterminer l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin ax,$$

où

$$a^2 - 4 \lessgtr 0;$$

2° *En considérant cette intégrale comme l'équation d'une courbe, déterminer les constantes arbitraires de façon que la courbe passe par l'origine et soit tangente à l'axe* OX *en* O;

3° *En supposant* $a = 1$, *et* x *compris entre* 0 *et* π, *étudier la forme de la courbe; montrer qu'elle a un point d'inflexion. Calculer l'aire comprise entre cette courbe et* OX;

4° *Que devient l'intégrale générale de l'équation donnée, si* $a = 2$?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une courbe est représentée, en coordonnées polaires, par l'équation*

$$\rho = a(1 + \cos\omega).$$

Déterminer le centre de gravité de l'arc obtenu en faisant varier ω *de* 0 *à* π. (Novembre 1909.)

Nancy.

ANALYSE. — I. *Exposer la méthode de la variation des constantes pour l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre, en prenant comme exemple* *l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cot^2 x.$$

II. *Dans un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère une courbe* C; *on désigne par* M *un point quelconque de cette courbe, par* P *sa projection sur* Ox *et par* N *le point de rencontre avec* Ox *de la normale à la courbe au point* M. *Déterminer la courbe* C *par la condition que la somme des deux longueurs* MN *et* MP *soit égale à une longueur donnée* $2a$. *Construire la courbe* C.

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE. — *On donne un cône de révolution ayant pour sommet l'origine* O *des coordonnées, pour axe l'axe des* z *et pour demi-angle au sommet un angle égal à* $\frac{\pi}{2} - \alpha$. *On trace sur ce cône une courbe* C *définie par une relation entre les coordonnées polaires de sa projection sur le plan des* xy.

1° *Déterminer cette relation par la condition que la tangente à la courbe* C *en chacun de ses points* M *fasse un angle constant* V *avec le rayon du parallèle du cône passant par ce point;*

2° *Montrer que la tangente à la courbe* C *au point* M *fait un angle constant avec l'axe des* z *et calculer l'arc de la courbe* C;

3° *Un point matériel est assujetti à se déplacer sur cette courbe en restant soumis à l'action d'une seule force attractive, perpendiculaire à l'axe* Oz *et inversement proportionnelle à la distance du point à cet axe; calculer le travail de cette force lorsque le plan passant par l'axe des* z *et le point a tourné d'un angle donné.*

(Juin 1909.)

ANALYSE. — I. *Étant donnée l'intégrale curviligne*

$$\int P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

énoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale ne dépende que des deux extrémités du contour d'intégration et pour que l'expression

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

soit une différentielle totale exacte.

II. *Étant donnée une courbe rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *former l'équation différentielle exprimant que l'angle fait avec* Ox *par la tangente en un point quelconque* M *est le triple de l'angle fait avec* Ox *par le rayon vecteur* OM.

Intégrer cette équation différentielle et construire les courbes intégrales.

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE. — *On considère la surface réglée représentée par les équations*

$$x = (a + z)\cos t, \qquad y = (a - z)\sin t,$$

où a *est une constante et* t *un paramètre variable.*

1° *Trouver sur la surface le lieu des points où le plan tangent est parallèle à* Oz.

2° *Un point mobile sur la surface est soumis à une force représentée à chaque instant par un vecteur dirigé suivant la génératrice passant par ce point et ayant pour projection sur l'axe des* z *l'expression* $z + f(t)$, $f(t)$ *étant une fonction de la seule variable* t.

Déterminer la fonction $f(t)$ *de telle sorte que le travail de la force pour un déplacement quelconque du point sur la surface ne dépende que de l'origine et de l'extrémité de ce déplacement et évaluer ce travail.*

(Octobre 1909.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère deux courbes* C *et* C' *dont les équations, en coordonnées rectangulaires, sont :*

$$(c) \qquad x^3y^2 - x + 1 = 0;$$

$$(c') \qquad x^5y^4 - x + 1 = 0.$$

1° *Construire ces courbes. Déterminer les points en lesquels les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées, les points d'inflexion et les tangentes en ces points.*

2° *Démontrer qu'une hyperbole asymptote aux deux axes de coordonnées coupe toujours chacune des courbes* C *et* C' *en un seul point. En déduire qu'on peut exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre les coordonnées des points de* C *et de* C'.

3° *Chacune des deux courbes* C *et* C' *partage en deux* *régions le demi-plan* $x > 0$ *et le quadrant* $x < 0, y > 0$. *Dire si ces régions ont ou non des aires finies; calculer celles de ces aires qui sont finies.*

Un arc de la courbe C *et la corde de cette courbe qui joint les points de contact des tangentes parallèles à* Ox *limite une aire finie* S. *Calculer cette aire et l'aire analogue* S'.

Montrer que ces questions peuvent être traitées soit en se servant des équations cartésiennes, soit en se servant des expressions paramétriques des coordonnées de C *et de* C'.

4° *Former l'équation différentielle qui admet pour courbes intégrales celles qui ont pour équation*

$$x(xy)^{\lambda} - x + 1 = 0,$$

λ *étant un paramètre.*

Cette équation différentielle étant donnée, comment l'intégrerait-on? Y a-t-il des intégrales singulières?

Épreuve pratique. — I. *Combien l'équation*

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 = 0$$

a-t-elle de racines réelles? Calculez à $\frac{1}{10}$ *près la plus grande de ces racines.*

II. *Un point pesant se déplace sans frottement sur la parabole dont l'équation est* $x^2 = 2y$, *les axes étant rectangulaires, l'axe des* y *étant vertical et dirigé vers le haut.*

Calculer la durée des oscillations du point, sachant qu'on l'a abandonné sans vitesse initiale en l'un des deux points de la parabole qui sont dans le même plan horizontal que le foyer. (Juillet 1908.)

Épreuve théorique. — 1° *Construire la courbe* C, *donnée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2;$$

2° *Quel que soit* m, *la droite issue de l'origine et faisant avec* Ox *un angle dont la tangente est égale à un rencontre* C *en un seul point en dehors de l'origine* O. *Exprimer les coordonnées de ce point en fonction de* m *et former l'équation de la tangente en ce point;*

3° *Combien passe-t-il de tangentes réelles à la courbe* C *par un point donné* (α, β) *du plan* xOy. *Partager le plan en régions d'après le nombre de tangentes passant par les points de chaque région;*

4° *Calculer l'aire de la région dans laquelle ne passe aucune tangente à* C;

5° *Soit* M *un point de* C, *trouver l'enveloppe de la perpendiculaire* MN *à* OM, *quand* M *parcourt* C;

6° Oy *étant vertical et dirigé vers le haut, étudier le mouvement d'un point pesant* M *glissant sans frottement sur la courbe* C.

On supposera qu'au temps $t = 0$ *le point* M *est à l'origine sans vitesse initiale et l'on examinera ce qui se passe suivant que* M *est placé sur l'une ou l'autre des deux branches de* C *passant en* O.

Épreuve pratique. — I. 1° *Déterminer l'intégrale générale de l'équation*

$$y''' - y'' - y' + y = e^{\alpha x}. \tag{1}$$

Cette forme de l'intégrale générale convient-elle au cas où $\alpha = 1$?

2° *En supposant* $\alpha \neq \pm 1$, *déterminer celle des intégrales de l'équation* (1) *qui s'annule ainsi que ses deux premières dérivées pour* $x = 0$.

3° *Vers quelle limite tend cette intégrale quand* α *tend vers* 1? *Vérifier que cette limite satisfait à l'équation*

$$y''' - y'' - y' + y = e^{x}. \tag{2}$$

En déduire l'intégrale générale de cette équation.

4° *Déterminer par analogie l'intégrale générale de l'équation*

$$y''' - y'' - y' + y = x^2 e^{x}. \tag{3}$$

II. *Déterminer les fonctions* $z(x, y)$ *satisfaisant à l'équation*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = y - z + \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Vérifier que les surfaces $z = z(x, y)$ *définies à l'aide de ces fonctions sont engendrées par des droites parallèles au plan des* xz *et rencontrant une droite fixe.*

(Novembre 1908.)