

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 460-462

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__460_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. Ch. Halphen. — *Au sujet de l'étude sur les champs de forces* (numéro de juin 1910). — Je dois rectifier une

erreur qui s'est glissée dans l'étude sur les champs de forces. Dans la deuxième Partie (§ 1) se trouve ce théorème : Si $u(x, y, z) = \lambda$ est l'équation d'une famille de surfaces homothétiques par rapport à l'origine, la fonction u est homogène, qui est faux, comme sa démonstration.

L'exemple suivant, qui m'a été signalé par M. P. Appell,

$$\text{Log } x + \text{Log } y + \text{Log } z = \lambda$$

le montre clairement. Néanmoins, les conclusions de cette deuxième Partie subsistent :

1° Il n'y a rien à changer à la première forme du théorème du deuxième paragraphe : les lignes de force formant une congruence homothétique par rapport à un point, les surfaces de niveau, lorsqu'elles existent, sont homothétiques par rapport au même point.

La démonstration peut cependant être mise sous une forme légèrement différente, analogue à celle que va prendre la seconde partie de ce théorème et avec des hypothèses moins restrictives. Si nous écrivons ainsi le système (4) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta(x, y, z)}{\alpha(x, y, z)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\gamma(x, y, z)}{\alpha(x, y, z)},$$

on voit que les lignes de force forment une congruence homothétique si les quotients $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ sont des fonctions homogènes de degré zéro, puisque les premiers membres, comme les seconds, ne changent pas quand x, y, z sont multipliés par k . Les surfaces de niveau, qui satisfont à l'équation

$$dx + \frac{\beta}{\alpha} dy + \frac{\gamma}{\alpha} dz = 0,$$

seront homothétiques par rapport à l'origine, pour la même raison.

2° Soit $u(x, y, z) = \lambda$ l'équation d'une famille de surfaces homothétiques par rapport à l'origine. Les cosinus directeurs

de la normale en un point (x, y, z) d'une de ces surfaces,

$$\alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\gamma = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

sont des *fonctions homogènes de degré zéro* en x, y, z . En effet, considérons une autre surface de la même famille ; son plan tangent au point $x_1 = kx, y_1 = ky, z_1 = kz$, est, par hypothèse, parallèle au plan tangent à la première surface au point (x, y, z) ; et l'on a

$$\alpha(kx, ky, kz) = \alpha(x, y, z),$$

$$\beta(kx, ky, kz) = \beta(x, y, z),$$

$$\gamma(kx, ky, kz) = \gamma(x, y, z),$$

quel que soit k . Il en résulte que les quotients

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial u}{\partial x}}$$

ont aussi des fonctions homogènes de degré zéro. Donc les lignes de force, trajectoires orthogonales de cette famille de surfaces, forment bien une congruence homothétique.

La faute en question n'entache donc pas le résultat.