M.-F. EGAN

Note sur les quadriques circonscrites à deux sphères

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 518-523

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__518_0>

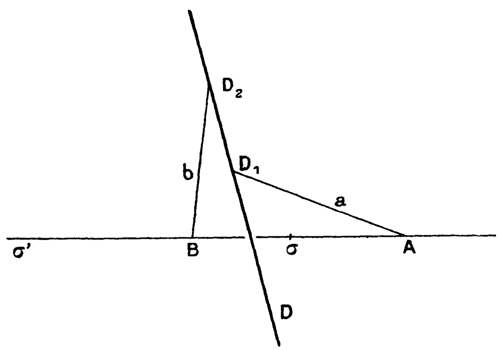
[L^2 21 c]

NOTE SUR LES QUADRIQUES CIRCONSCRITES A DEUX SPHÈRES;

PAR M. M.-F. EGAN.

M. Bricard a démontré ([1]) que les plans tangents menés par une droite D, qui varie en touchant deux

Fig. 1.



sphères, à une quadrique Q circonscrite aux deux sphères, contiennent un angle θ qui est indépendant de la position de D, et que les plans bissecteurs de cet angle sont les plans qui passent par les centres de similitude des sphères.

Cet angle θ caractérise la quadrique Q, que l'on peut désigner, par conséquent, par $Q(\theta)$.

Ces quadriques jouissent aussi de la propriété suivante :

([1]) *Nouv. Ann.*, mars 1909.

L'angle des deux plans, issus d'une génératrice quelconque de $Q(\theta)$, *qui passent par les centres des sphères, est égal à* θ.

I. Pour le montrer, refaisons la démonstration du théorème de M. Bricard d'un autre point de vue. Soient A et B les centres des sphères, a et b leurs rayons, et soient

$$(1) \qquad l^2 = a^2 J, \qquad m^2 = b^2 J \qquad (J = u^2 + v^2 + w^2)$$

les équations des sphères en coordonnées tangentielles.

Toute quadrique de révolution autour de AB a deux foyers (réels ou imaginaires) sur AB, dont les équations seront

$$el + fm = 0, \qquad e'l + f'm = 0,$$

e, f, e', f' étant des constantes. L'équation de la quadrique sera donc

$$(el + fm)(e'l + f'm) = kJ.$$

Si la quadrique est circonscrite aux sphères a et b, il est facile de voir que son équation s'écrira

$$(2) \qquad S(\theta) = \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - 2\frac{lm}{ab}\cos\theta - J\sin^2\theta = 0.$$

En effet, cette équation peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes

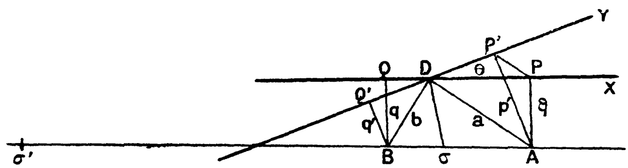
$$\left(\frac{l}{a} - \frac{m}{b}\cos\theta\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{m^2}{b^2} - J\right) = 0,$$

$$\left(\frac{l}{a}\cos\theta - \frac{m}{b}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{l^2}{a^2} - J\right) = 0.$$

L'angle θ, nous allons le voir, est précisément l'angle dont il est question dans l'énoncé.

Soient p et q les longueurs des normales issues de A et B à un plan quelconque. L'équation (2) nous

Fig. 2.



apprend que, si ce plan touche la quadrique S(θ), on a

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-\frac{2pq}{ab}\cos\theta=\sin^2\theta. \tag{3}$$

Considérons une droite D qui touche les deux sphères. Soient D_1 et D_2 les points de contact de D, et σ, σ' les centres de similitude (*fig.* 1). Projetons la figure AD_1D_2B sur un plan perpendiculaire à D (*fig.* 2). D se réduit à un point, tout plan qui passe par D est représenté par une droite, et l'angle de deux de ces droites est égal à celui des plans correspondants. Les longueurs AD_1, BD_2 ne sont pas changées; elles sont a et b, et les rapports $A\sigma : \sigma B$, $A\sigma' : \sigma' B$ restent égaux à $\pm a : b$. Donc $D\sigma$ et $D\sigma'$ sont les bissectrices dans la figure 2 ou les plans bissecteurs dans la figure 1 de l'angle ADB.

Menons deux plans DX et DY, faisant l'un et l'autre un angle $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ avec $D\sigma$. Si (p, q), (p', q') appartiennent à DX et DY, on a facilement

$$\frac{p}{a}=\frac{q'}{b},\qquad \frac{p'}{a}=\frac{q}{b}.$$

On a aussi $\left(\text{puisque } \widehat{PDP'}=\widehat{PAP'}=\theta\right)$

$$p'+p'^2-2pp'\cos\theta=PP'^2=a^2\sin^2\theta.$$

Donc

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{p'^2}{a^2}-2\frac{p}{a}\frac{p'}{a}\cos\theta=\sin^2\theta,$$

d'où, en substituant $\frac{q}{b}$ à $\frac{p'}{a}$, on tire

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-\frac{2pq}{ab}\cos\theta=\sin^2\theta.$$

On a de même

$$\frac{p'^2}{a^2}+\frac{q'^2}{b^2}-\frac{2p'q'}{ab}\cos\theta=\sin^2\theta.$$

Donc, les plans DX et DY sont bien les plans tangents menés par D à la quadrique $S(\theta)$, et leur angle est θ.

II. Supposons maintenant que D soit une génératrice de $S(\alpha)$ $(\theta\neq\alpha)$. On a toujours pour le plan DX

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-\frac{2pq}{ab}\cos\theta=\sin^2\theta.$$

Or DX, comme tout plan qui passe par D, touche la quadrique $S(\alpha)$; on a donc

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-\frac{2pq}{ab}\cos\alpha=\sin^2\alpha,$$

d'où, en soustrayant et divisant par $\cos\theta-\cos\alpha$, on tire

$$\cos\alpha+\cos\theta=\frac{2pq}{ab}=2\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BD}}=2\sin\mathrm{ADP}\sin\mathrm{BDQ}.$$

Or,

$$\mathrm{ADP}+\mathrm{BDQ}=\pi-\mathrm{ADB},\qquad \mathrm{BDQ}-\mathrm{ADP}=\theta;$$

donc

$$\cos\alpha+\cos\theta=\cos\theta+\cos\mathrm{ADB},$$

$$\therefore\ \cos\mathrm{ADB}=\cos\alpha.$$

ADB est l'angle entre les plans DA, DB; cet angle est donc égal à α pour toutes les génératrices D de la quadrique $S(\alpha)$. C. Q. F. D.

Notons que l'angle des plans menés par D et passant par les centres A et B est égal à celui des plans tangents des sphères aux points de contact avec D.

III. Si l'on fait une transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère quelconque, on déduit le théorème suivant :

Soient u et v deux coniques ayant un foyer commun F, *et soient* U *et* V *les quadriques qu'engendrent u et v en tournant chacune autour de son axe. Une quadrique donnée* Q, *circonscrite à* U *et* V, *coupera une droite* D, *qui varie en touchant* U *et* V, *en deux points qui sous-tendront un angle constant* θ *en* F. *Les points de contact avec* U *et* V *d'une génératrice quelconque de* Q *sous-tendront en* F *un angle égal à* θ. *Les bissectrices de* θ *seront les vecteurs issus de* F *aux points de rencontre de* D *avec les deux plans d'intersection de* U *et* V.

Dans le cas où u et v ont deux foyers communs F et F', il y aura deux angles constants θ et φ pour chaque quadrique Q. Ces deux angles se construisent facilement. Supposons que u et v soient respectivement une ellipse et une hyperbole. Donnons-nous la quadrique Q en nous donnant les vecteurs focaux r, r' à un point quelconque du cercle de contact de Q et V. Construisons un triangle ABC ayant

$$AB = r, \qquad AC = r'$$

et BC égal au grand axe de u. Soit AD la bissectrice intérieure de l'angle ABC. Alors, B et C sont respectivement θ et φ; BD, DC sont égaux aux rayons vecteurs focaux d'un point du cercle de contact de U et Q; AD est égal au segment de la génératrice de Q terminé par ses points de contact avec U et V. Pour construire la quadrique Q, on fait tourner le triangle ADC autour de AD jusqu'à ce que la distance BC soit égale à FF'; alors on superpose B et C sur F et F', et l'on fait tourner le tétraèdre FAF'D autour de FF'; AD engendre la quadrique Q.

La démonstration se fait sans difficulté si l'on tient compte de l'égalité des angles qu'une droite tangente à une quadrique de révolution fait avec les deux vecteurs focaux passant par le point de contact.