NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. KERAVAL

Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 35-49

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__35_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[N¹1K]

SUR LES COURBES DONT LES TANGENTES APPARTIENNENT A UN COMPLEXE LINÉAIRE;

PAR M. E. KERAVAL,

Professeur au lycée Hoche.

Si Oz est l'axe du complexe, ces courbes peuvent être définies par la propriété suivante : « En chaque point M de la courbe le plan osculateur contient la perpendiculaire MP à l'axe Oz. » Si les coordonnées x, y, z du point M sont fonctions d'un paramètre t, on a une relation de la forme

$$xy' - yx' = Kz', \tag{1}$$

où K est une constante qu'on peut supposer positive. Pour abréger, j'appellerai ces courbes des courbes K. L'équation du plan osculateur peut s'écrire, en appelant X, Y, Z les coordonnées courantes,

$$yX - xY + K(Z - z) = 0. \tag{2}$$

Ce plan osculateur fait avec le plan MOZ un angle α tel que

$$\tan\alpha = \frac{K}{\rho}, \tag{3}$$

ρ désignant la distance MP. On sait que ces courbes K sont les lignes asymptotiques des surfaces

$$\frac{y}{x} = F(z),$$

de sorte qu'on peut écrire leurs équations

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = F(z), \\ x^2 = \dfrac{K}{F'(z)}, \end{cases}$$

où F désigne une fonction quelconque.

Tous ces résultats sont bien connus et très faciles à établir. Voici une propriété qui, je crois, n'est pas connue :

Théorème. — *On peut définir les courbes* K *comme les courbes tracées sur une surface de révolution absolument quelconque et qui coupent les méridiens* *sous un angle aigu* V *tel que*

$$\operatorname{tang} V = \frac{K}{N},$$

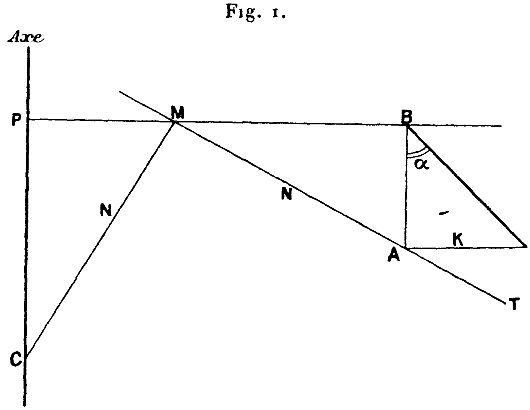
K *étant une constante primitive et* N *la longueur de la normale à la surface limitée à l'axe.*

Dans la suite cet axe sera toujours l'axe des z (les axes rectangulaires) et je l'appellerai l'*axe de révolution de la courbe*.

Ce théorème est bien facile à vérifier par le calcul; je préfère indiquer une démonstration géométrique fort simple.

Je figure le plan déterminé par M et l'axe (*fig.* 1).

Fig. 1.



Je fais tourner la courbe K qui passe par M autour de cet axe. Soient MT la tangente au méridien, MC = N la normale. La tangente en M à la courbe K se projette sur la feuille suivant MT. Si je prends

$$MA = MC = N,$$

j'aurai

$$AB = MP = \rho.$$

En vertu de la formule (3) $\operatorname{tang}\alpha = \frac{K}{\rho}$, le point projeté en A et de cote K appartiendra à la tangente à la courbe K. Dès lors cette tangente fait avec MA l'angle V tel que

$$\operatorname{tang} V = \frac{K}{N}.$$

Réciproquement, si tang V a cette valeur on a une courbe K. En effet on aura

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{K}{\rho};$$

la tangente fera partie du complexe linéaire, etc.

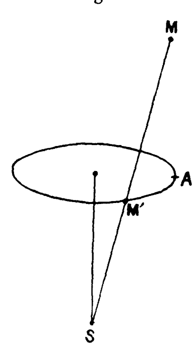
Cas particulier important. — Il est évident que sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe les courbes K doivent être les *génératrices rectilignes;* j'utiliserai plus loin cette propriété.

Conséquences. — 1° Si l'on prend la sphère comme surface de révolution, $N = \text{const.}$, donc $V = \text{const.}$; les courbes K sont alors les loxodromies sphériques.

2° Sur le cylindre de révolution on obtient l'hélice circulaire.

3° Sur le cône de révolution on obtient une courbe

Fig. 2.



qui dans le développement du cône doit se transformer en spirale hyperbolique et qu'on peut construire ainsi : on marque sur le cône de sommet S un cercle fixe et sur ce cercle une origine A.

On prend alors (*fig.* 2)

$$\mathrm{SM} = \frac{\text{const.}}{\operatorname{arc} \mathrm{AM}'}.$$

Exemple :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\cos t}{t}, \\ y &= \frac{\sin t}{t}, \\ z &= \frac{1}{t}. \end{aligned}\right.$$

I. — Torsion des courbes K.

Je suppose x, y, z fonctions d'un paramètre t. On a

$$xy' - yx' = \mathrm{K} z'$$

par hypothèse.

L'équation du plan osculateur au point x, y, z est

$$y\mathrm{X} - x\mathrm{Y} + \mathrm{K}(\mathrm{Z} - z) = 0.$$

D'autre part, cette équation peut s'écrire

$$\mathrm{A}(\mathrm{X} - x) + \mathrm{B}(\mathrm{Y} - y) + \mathrm{C}(\mathrm{Z} - z) = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= y'z'' - z'y'', \\ \mathrm{B} &= z'x'' - x'z'', \qquad \Omega^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2. \\ \mathrm{C} &= x'y'' - y'x'', \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\mathrm{A}}{y} = \frac{\mathrm{B}}{-x} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{K}} = \mathrm{F}.$$

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

La torsion sera

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta}{\Omega^2},$$

$$\Omega^2 = F^2(\rho^2 + K^2) \qquad \text{si} \qquad \rho^2 = x^2 + y^2,$$
$$\Delta = F(yx''' - xy''' + Kz''').$$

Mais

$$xy' - yx' = Kz',$$
$$xy'' - yx'' = Kz'',$$
$$yx''' - xy''' + Kz''' = x'y'' - y'x'' = KF.$$

Donc

$$\Delta = KF^2.$$

D'où

$$\frac{1}{T} = \frac{K}{\rho^2 + K^2}$$

et enfin

$$(4) \qquad T = K + \frac{\rho^2}{K}.$$

Cette formule a été donnée pour la première fois par M. Appell dans sa Thèse sur les cubiques gauches. La formule qui donne la courbure n'a pas été donnée, du moins à ma connaissance; elle est plus compliquée.

Courbure $\left(\frac{1}{R}\right)$ des courbes K.

J'envisage la courbe K comme tracée sur une surface de révolution d'axe Oz d'après la loi que j'ai indiquée :

$$\operatorname{tang} V = \frac{K}{N}.$$

Soient s l'arc de la courbe et σ l'arc du méridien :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\Omega^2}{s'^6} = \frac{F^2(\rho^2 + K^2)}{s'^6}.$$

Si je pose

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\operatorname{tang} V = \frac{K}{N} = \frac{\rho\varphi'}{\sigma'},$$

$$s'^2 = \sigma'^2 + \rho^2\varphi'^2 = \frac{\sigma'^2(K^2+N^2)}{N^2},$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{F^2(K^2+\rho^2)N^6}{(N^2+K^2)^3\sigma'^6}.$$

Pour calculer F je me sers de la formule

$$x'y'' - y'x'' = KF,$$

qui s'écrit

$$KF = 2\rho'^2\varphi' + \rho\rho'\varphi'' - \rho\rho''\varphi' + \rho^2\varphi'^3,$$

$$\varphi' = \frac{Kz'}{\rho^2}, \qquad \varphi'' = \frac{K(\rho z'' - 2\rho' z')}{\rho^3},$$

$$F = \frac{\rho' z'' - \rho'' z'}{\rho} + \frac{K^2 z'^3}{\rho^4}.$$

Soit r le rayon de courbure de la méridienne,

$$r = \frac{\varepsilon\sigma'^3}{\rho' z'' - z'\rho''};$$

$\varepsilon = +1$ si la concavité de la méridienne est tournée vers l'axe, sinon $\varepsilon = -1$;

$$F = \frac{\varepsilon\sigma'^3}{\rho r} + \frac{K^2 z'^3}{\rho^4},$$

$$\frac{z'}{\sigma'} = \frac{\rho}{N},$$

d'où

$$\frac{F}{\sigma'^3} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\varepsilon}{r} + \frac{K^2}{N^3}\right);$$

d'où

(5) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{K^2+\rho^2}{(K^2+N^2)^3}}\left(\frac{\varepsilon N^3}{r} + K^2\right).$$

Telle est la formule qui donne la courbure en fonction de celle de la méridienne.

Applications. — 1° Pour la courbe considérée plus haut

$$x = \frac{\cos t}{t}, \qquad y = \frac{\sin t}{t}, \qquad z = \frac{1}{t},$$

on trouve

$$T = z^2 + 1, \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{z^2 + 1}{z^2(1 + 2z^2)^3}.$$

2° Pour la courbe

$$x = e^t, \qquad y = e^{-t}, \qquad z = t\sqrt{2},$$

$$R = T = \frac{(x+y)^2}{\sqrt{2}}.$$

Celle-ci est une hélice.

3° La courbe K

$$x = 1 - \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t - \sin t$$

est tracée sur un cylindre de révolution; l'axe de la courbe est une génératrice du cylindre. Elle se projette sur xOz suivant une cycloïde et donne

$$T = 2x + 1, \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^3}.$$

4° La courbe

$$x = e^t \cos t, \qquad y = e^t \sin t, \qquad z = e^{2t}$$

est une courbe K sur paraboloïde de révolution

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1 + 4z}{2z(1 + 2z)^3}.$$

II. — Courbes K qui sont des hélices.

J'écris que

$$\frac{T}{R} = \text{const.} = m$$

et j'ai

$$\left(\frac{K^2+\rho^2}{K^2+N^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{N^3}{Kr}-K\right)=m\rho \qquad \text{si} \qquad \varepsilon=-1.$$

Ce que j'ai dit à propos de l'hyperboloïde me conduit à poser

$$M=\frac{N^2+K^2}{\rho^2}$$

ou, en prenant z comme variable,

$$M=\frac{K^2}{\rho^2}+1+\rho'^2,$$

$$M'=\frac{2K\rho'}{\rho^3}\left(\frac{N^3}{Kr}-K\right).$$

L'équation à intégrer devient

$$\left(\frac{K^2+\rho^2}{K^2+N^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2Km}{\rho^2}\frac{d\rho}{dn}$$

ou

$$\frac{(K^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{3}{2}}}=2Km\rho\frac{d\rho}{dn}.$$

Les variables se séparent et l'on a

$$(6) \qquad \frac{Km}{\sqrt{K^2+\rho^2}}+\frac{\varepsilon\rho}{\sqrt{N^2+K^2}}=C,$$

qui définit la méridienne par une relation entre ρ et N. Nous allons retrouver la formule (6) par une méthode différente.

Équations des courbes K qui sont des hélices.

Supposons que l'axe hélical ait ses cosinus directeurs proportionnels à α, o, γ. La normale au plan osculateur doit faire un angle constant avec cette direction, ce qui donne une équation de la forme

$$\rho^2 + K^2 = \frac{(\alpha y + \gamma K)^2}{\cos^2\lambda}.$$

Nos courbes se projettent donc sur le plan des xy suivant une conique, ellipse, hyperbole ou parabole. Comme tout ceci doit être connu, j'indique simplement les résultats.

Premier cas. — La projection est une ellipse d'axes $2a$, $2b$:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

L'axe focal doit rencontrer Oz ; ici c'est Oy.

La courbe K, qui est une hélice, a pour équations

$$\left\{\begin{aligned} x &= b\cos t \\ y &= a\sin t + h \\ z &= \frac{ab}{K}t - \frac{bh}{K}\cos t \end{aligned}\right. \qquad (h > 0),$$

où

$$h = \frac{c}{b}\sqrt{b^2 + K^2}.$$

Pour la méridienne du plan des xz nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= b^2\cos^2 t + (a\sin t + h)^2, \\ z &= \frac{ab}{K}t - \frac{bh}{K}\cos t. \end{aligned}\right.$$

On trouve facilement

$$\frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2 + K^2}} = \frac{c(a + h\sin t)}{c^2\sin t + ah},$$

$\varepsilon = \pm 1$ suivant le signe de $a + h\sin t$,

$$\frac{K}{+\sqrt{x^2 + K^2}} = \frac{cK}{c^2\sin t + ah}.$$

D'où

$$(6') \qquad \frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2 + K^2}} + \frac{\frac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2 + K^2}} = \frac{h}{c};$$

p, c'est le paramètre $\frac{b^2}{a}$.

Deuxième cas. — La projection est une hyperbole. L'axe focal rencontre Oz; ici c'est Oy. L'hélice K a pour équations

$$\begin{cases} x = b \operatorname{sh} t, \\ y = a \operatorname{ch} t + h, \\ z = -\frac{ab}{K} t - \frac{bh}{K} \operatorname{sh} t, \end{cases}$$

et la méridienne du plan des xz,

$$\begin{cases} x^2 = b^2 \operatorname{sh}^2 t + (a \operatorname{ch} t + h)^2, \\ z = \frac{abt + bh \operatorname{sh} t}{-K}. \end{cases}$$

On trouve facilement

$$\frac{x}{\pm\sqrt{N^2 + K^2}} = \frac{c(a + h \operatorname{ch} t)}{c^2 \operatorname{ch} t + ah},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + K^2}} = \frac{c}{c^2 \operatorname{ch} t + bh},$$

d'où

$$(6'') \qquad \frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2 + K^2}} + \frac{\frac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2 + K^2}} = -\frac{h}{c}.$$

Troisième cas. — La projection est une parabole. Ce cas est tout particulièrement intéressant, puisque nous avons toutes les hélices cubiques.

Elles ont pour équations

$$\left\{\begin{aligned} x &= 2pt, \\ y &= 2pt^2 + h, \\ z &= \frac{4p^2}{3K}t^3 - \frac{2ph}{K}t, \end{aligned}\right.$$

$$K = +\sqrt{p^2 + 2ph}.$$

La méridienne a pour équations

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= 4p^2t^4 + 4p(p+h)t^2 + h^2, \\ z &= \frac{2pt}{3K}(2pt^2 - 3h). \end{aligned}\right.$$

On trouve

$$\frac{p+2h}{\sqrt{x^2+K^2}} = \frac{p+2h}{2pt^2+p+h},$$

$$\frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2+K^2}} = \frac{2pt^2-h}{2pt^2+p+h},$$

d'où

$$(6''') \qquad \frac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2+K^2}} + \frac{\frac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2+K^2}} = +1.$$

Réciproquement, il est facile d'intégrer cette équation et de retrouver la méridienne.

En résumé, les méridiennes sont caractérisées par l'équation intrinsèque :

Projection ellipse.... $\dfrac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2+K^2}} + \dfrac{\frac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2+K^2}} = \dfrac{h}{c} \quad (h > c)$

Projection hyperbole. $\dfrac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2+K^2}} + \dfrac{\frac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2+K^2}} = -\dfrac{h}{c} \quad (h < c)$

Projection parabole.. $\dfrac{\varepsilon x}{\sqrt{N^2+K^2}} + \dfrac{\frac{K^2}{p}}{\sqrt{x^2+K^2}} = 1$

Exemple. — Pour la cubique hélicale :

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2} \\ z &= \frac{t^3}{12} - \frac{3t}{4} \end{aligned}\right\} \quad \text{d'axe } Oz.$$

La méridienne est (comme toujours dans le plan des xz)

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{t^4 + 10t^2 + 9}{4}, \\ z &= \frac{t(t^2 - 9)}{12}, \end{aligned}\right. \qquad K = 2.$$

Si l'on suppose $x > 0$,

$$\frac{x}{\sqrt{N^2 + K^2}} = \frac{t^2 - 3}{t^2 + 5} \qquad \text{si} \qquad t > \sqrt{3},$$

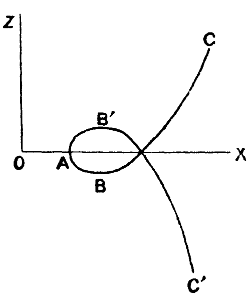
$$\frac{K}{\sqrt{x^2 + K^2}} = \frac{4}{t^2 + 5}.$$

On a donc

$$\frac{\varepsilon r}{\sqrt{N^2 + K^2}} + \frac{2K}{\sqrt{x^2 + K^2}} = +1;$$

$$\varepsilon = +1$$

Fig. 3.



sur l'arc BC et B′C′ (*fig.* 3),

$$\varepsilon = -1$$

sur l'arc B′AB.

III. — Étude des méridiennes algébriques.

Les hélices cubiques sont les courbes tracées suivant la loi

$$\operatorname{tang} V = \frac{K}{N}$$

sur les surfaces de révolution dont la méridienne a pour équations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= 4p^2t^2 + (2pt^2 + h)^2, \\ z &= \frac{2pt}{3K}(2pt^2 - 3h). \end{aligned} \right.$$

Ce sont ces méridiennes que je me propose d'étudier. Si l'on élimine t entre les équations qui précèdent, on trouve

$$(8) \qquad Az^4 + z^2(Bx^2 + C) + F(x) = 0,$$

où

$$F(x) \equiv 4p^2(x^2 - h^2)[x^2 - h(h + 3d)]^2.$$

J'ai posé pour abréger

$$\begin{aligned} d &= 2p + 5h, \\ A &= -81K^4, \\ B &= -54pK^2(d + h), \\ C &= +18pK^2(3dh^2 + 3h^3 + 3d^2h - d^3). \end{aligned}$$

La forme (8) met de suite en évidence deux points doubles sur $x'x$. La courbe admet évidemment Ox, Oz pour axes de symétrie.

Si l'on traite l'équation (8) comme une équation du deuxième degré en z^2 et qu'on forme le discriminant, on trouve à un facteur constant près qui est positif l'expression

$$(x^2 + d^2 - h^2)^2(x^2 + K^2).$$

La présence du carré nous indique encore des points doubles imaginaires, parce que

$$h^2 - d^2 < 0.$$

On a ainsi quatre points doubles imaginaires; donc six points doubles à distance finie. Enfin à l'infini nous trouvons un point double dans la direction Oz; la droite de l'infini touche la courbe en six points confondus.

Enfin aux points de rencontre imaginaires de la courbe avec l'axe des z le rayon de courbure égale $\pm Ki$.

Les points doubles sur $x'x$ peuvent venir se confondre en O; c'est ce qui arrive par exemple avec la méridienne unicursale

$$\begin{cases} x = 3t\sqrt{1+t^2}, \\ z = 2t^3, \end{cases}$$

qui admet six foyers sur Ox et six sur Oz.

Sur Ox leurs abscisses sont données par l'équation

$$4x^3 + 2x \pm 7 = 0,$$

ce qui donne deux foyers réels sur $x'x$.

Toutes ces propriétés peuvent être établies encore plus facilement en partant des formules (7).

Note. — Pour l'étude de la loxodrome sphérique j'ai pris les formules suivantes qui me paraissent particulièrement commodes; r désigne le rayon de la sphère :

$$x = r\frac{\cos t}{\operatorname{ch} mt},$$

$$y = r\frac{\sin t}{\operatorname{ch} mt},$$

$$z = r\frac{\operatorname{sh} mt}{\operatorname{ch} mt}.$$