Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 245-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__245_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2091.

(1908, p. 96.

Le nombre n étant supposé impair, démontrer que, si l'on évalue la quantité $\frac{\sin nx}{\sin x}$ *en fonction de* $\cos x$, *l'expression obtenue est un produit de deux facteurs rationnels. Que représente chacun de ces facteurs ?*

(G. F.)

SOLUTION

Par l'AUTEUR.

La solution insérée au précédent Volume (p. 575) est erronée. Il faut entendre ici par facteurs rationnels des facteurs *à coefficients rationnels,* et les deux facteurs indiqués ne vérifient pas cette condition.

Si l'on écrit

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \sqrt{\frac{1-\cos nx}{1-\cos x}}\sqrt{\frac{1+\cos nx}{1+\cos x}},$$

on reconnaît aisément que, pour n impair, chacune des deux quantités placées sous un radical s'exprime en fonction de $\cos x$ par un polynome à coefficients rationnels qui est un carré parfait, et la question se trouve ainsi complètement résolue.

On a, par exemple,

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = (4\cos^2 x + 2\cos x - 1)(4\cos^2 x - 2\cos x - 1);$$

les racines du premier facteur sont

$$\cos\frac{2\pi}{5},\quad \cos\frac{4\pi}{5},$$

et celles du second facteur sont

$$\cos\frac{2\pi}{5},\quad \cos\frac{\pi}{5}.$$

AUTRE SOLUTION

Par M. Letierce.

Posons

$$n = 2m+1.$$

On a

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} = \frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\frac{\cos(2m+1)\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.$$

Mais

$$\frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p C_{2m+1}^{2p+1}\cos^{2m-2p}\frac{x}{2}\sin^{2p}\frac{x}{2},$$

$$\frac{\cos(2m+1)\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p C_{2m+1}^{2p}\cos^{2m-2p}\frac{x}{2}\sin^{2p}\frac{x}{2}.$$

Remplaçant dans ces expressions $\cos^2\frac{x}{2}$ et $\sin^2\frac{x}{2}$ par leurs expressions en fonction de $\cos x$, on a finalement

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} = & \left[\frac{1}{2^m}\sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p C_{2m+1}^{2p+1}(1-\cos x)^p(1+\cos x)^{m-p}\right] \\ & \times\left[\frac{1}{2^m}\sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p C_{2m+1}^{2p}(1-\cos x)^p(1+\cos x)^{m-p}\right].\end{aligned}$$

2104

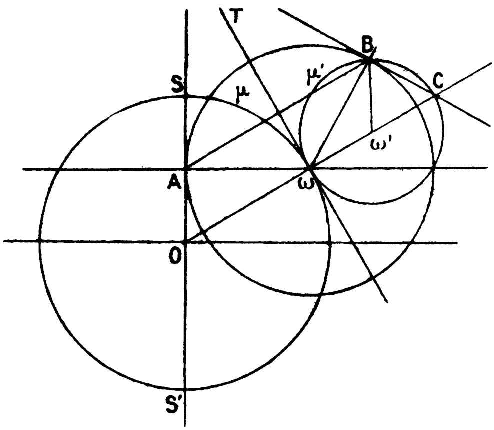
(1908, p. 479.)

Étant donnée une ellipse de demi-axes R *et* 2R, *le cercle ayant pour diamètre une demi-corde parallèle au grand axe enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements.*

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Le lieu du milieu des demi-cordes parallèles au grand axe



dans l'ellipse considérée est le cercle G de rayon R concentrique à l'ellipse. Soit ω l'un des cercles envisagés ; il touche son enveloppe au point B symétrique de son point de contact A avec le petit axe de l'ellipse par rapport à la tangente au cercle G en ω. La tangente en B au cercle ω coupe O ω en C; le triangle ωBC est égal au triangle ωAO; par suite,

$$\omega C = O\omega = R.$$

Soit ω′ le centre du cercle décrit sur ωC comme diamètre; $\widehat{\omega\omega' B} = 2$ fois l'angle $\widehat{AO\omega}$: par suite, les arcs $\widehat{S\mu\omega}$ et $\widehat{\omega\mu' B}$ sont égaux, et le lieu du point B, enveloppe du cercle ω, est l'épicycloïde à deux rebroussements engendrée par un point du cercle ω′ roulant sur le cercle O, les deux rebroussements étant S et S′.

Autres solutions par MM. G. Pelissier, Lez, Rose, Têtu.