G. FONTENÉ

Symétrie des polyèdres réguliers

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 75-77

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__75_1>

[K14c]

SYMÉTRIE DES POLYÈDRES RÉGULIERS [1];

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Les polyèdres réguliers, *à l'exception du tétraèdre* que nous laisserons de côté dans tout ce qui suit, ont un centre de symétrie.

2. *Soient* P *un plan,* X *une perpendiculaire à ce plan qui le perce en* O; *si une figure admet comme*

[1] Cette Note a été inspirée par la lecture du *Traité de Géométrie* de M. Borel (premier et second cycles), où sont étudiées les symétries du cube et de l'octaèdre réguliers.

éléments de symétrie deux des trois éléments P, X, O, *elle admet aussi le troisième.* En ce qui concerne l'axe X, il s'agit bien entendu dans cet énoncé de symétrie binaire.

Il suit de là que les plans de symétrie des polyèdres réguliers sont les plans menés par le centre perpendiculairement aux axes d'ordre pair.

3. Un polyèdre régulier étoilé admettant les mêmes symétries que le polyèdre convexe qui a les mêmes sommets ou les mêmes plans de faces, *on peut se borner à la considération des polyèdres réguliers convexes.*

4. Soit un tel polyèdre. Le nombre des faces est F, et chaque face contient x arêtes ; le nombre des sommets est S, et chaque angle polyèdre a y arêtes ; le nombre des arêtes est A ; on a

$$Fx = Sy = 2A, \qquad F + S = A + 2.$$

Le polyèdre admet

$$\begin{array}{lcc} \frac{F}{2} & \text{axes d'ordre} & x, \\ \frac{S}{2} & \text{»} & y, \\ \frac{A}{2} & \text{»} & 2, \end{array}$$

selon qu'une face, un angle polyèdre ou une arête doit admettre l'axe considéré. Ces axes sont distincts, comme on s'en assure aisément.

Il n'y en a pas d'autres. En effet, le nombre de façons dont le polyèdre peut être mis en coïncidence avec lui-même est évidemment Fx, ou encore Sy, ou encore 2A. Or, en partant d'une position fondamentale, le nombre des positions nouvelles qu'on peut obtenir par rotation autour des axes considérés est

$$\tfrac{1}{2}[F(x-1)+S(y-1)+A]$$

ou

$$\tfrac{1}{2}[4A-A-2+A]$$

ou

$$2A-1,$$

et ces positions sont distinctes. Les axes de symétrie indiqués sont donc les seuls qui existent, puisqu'un nouvel axe devrait, à partir de la position fondamentale, conduire à une position nouvelle.

5. Parmi les polyèdres réguliers étoilés, le dodécaèdre à faces pentagonales étoilées et à sommets trièdres, l'icosaèdre à faces triangulaires et à sommets pentaèdres étoilés, se comportent absolument, au point de vue de leurs symétries, comme les polyèdres convexes qui leur correspondent.

6. Le polyèdre qui a 12 faces pentagonales convexes et 12 angles pentaèdres étoilés, et celui qui a 12 faces pentagonales étoilées et 12 angles pentaèdres convexes, polyèdres qui ont 30 arêtes, satisfont à la relation

$$F+S=A+2-8$$

et sont de *genre* 4. Ils admettent :

6 axes d'ordre 5, qui correspondent à la fois aux faces et aux sommets ;

10 axes ternaires, qui correspondent aux faces de l'icosaèdre de mêmes sommets, ou encore aux sommets du dodécaèdre qui a les mêmes plans de faces ;

15 axes binaires, qui correspondent aux arêtes.