Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 561-567

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__561_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un corps solide, qui a un point fixe O, est formé d'une tige OA perpendiculairement à laquelle est fixé un disque circulaire pesant et homogène dont le centre est en A. On néglige la masse de la barre OA. La distance OA est égale à la moitié des rayons R du disque. Trouver le mouvement de ce système, sachant que primitivement le disque tourne autour de OA avec une vitesse angulaire égale à* $\sqrt{\frac{2g}{R}}$ *pendant que la barre, qui est d'abord horizontale, est lancée horizontalement avec une vitesse angulaire égale aussi à* $\sqrt{\frac{2g}{R}}$.

On fera pour la commodité du calcul

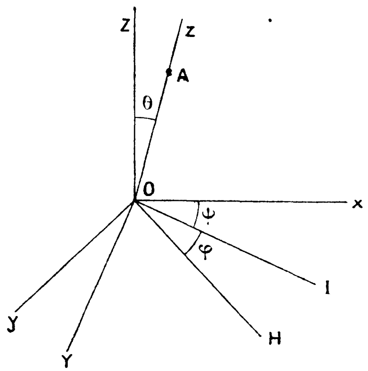
$$\frac{2g}{R} = \omega^2;$$

on remarquera que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O *se réduit à une sphère, de sorte qu'on a*

$$A = B = C = \frac{1}{2} MR^2.$$

SOLUTION.

On prend trois axes fixes dont l'axe OZ est dirigé vers le haut et trois axes mobiles dont l'axe Oz coïncide avec OZ.



Soit OI l'intersection des plans XY et xy. On définit la position du solide par les trois angles d'Euler.

Le théorème des forces vives donne, en faisant

$$A = \frac{MR^2}{2},$$

$$\sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{R}(\alpha - \cos\theta).$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à OZ donne

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{R}}(\beta - \cos\theta).$$

Les données initiales fournissent pour les constantes α et β la valeur 1.

Par élimination on est conduit à

$$\omega\, dt = \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1 - \cos\theta)\sqrt{\cos\theta}},$$

qui s'intègre en posant

$$\cos\theta = u^2,$$

et l'on en tire

$$\frac{e^{\omega t} - 1}{e^{\omega t} + 1} = \sqrt{\cos\theta},$$

par où l'on voit que, t croissant indéfiniment, θ tend vers zéro, et OA d'abord horizontal se relève en tendant vers la verticale.

On a ensuite

$$2\psi = \omega t + 2 \operatorname{arc\,tang} e^{\omega t},$$

ou sensiblement

$$\psi = \pi$$

pour t infini.

On a enfin

$$\varphi = \psi.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une voûte en arc de cercle est formée par un système articulé ainsi constitué :*

On trace deux arcs de cercle concentriques ; l'arc intérieur a 10^{m} *de rayon, l'arc extérieur a* 12^{m} *de rayon. L'arc intérieur a une ouverture de* $90°$. *On partage l'arc intérieur en huit parties égales dont les cordes donnent les tiges de l'arc intérieur. Les sommets de l'arc extérieur sont sur les perpendiculaires élevées au milieu des tiges de l'arc intérieur. On joint ces sommets entre eux et aux sommets de l'arc intérieur par des tiges. On a ainsi un système de triangles.*

Les extrémités de l'arc intérieur reposent sur deux appuis de niveau.

Sur les sommets de l'arc extérieur on applique des poids égaux P.

Trouver les tensions des tiges par un graphique.

(Juillet 1908.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un hémisphère creux, infiniment mince, rigide, homogène et pesant, glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe. Étudier son mouvement en supposant qu'à l'instant initial l'angle formé par l'axe de symétrie du solide avec la verticale ascendante soit égal à* 30° *et qu'au même instant le corps soit animé d'un mouvement de rotation autour de la verticale passant par son centre de gravité.*

On prendra le rayon de l'hémisphère et sa densité égaux à l'unité.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un fil rigide, circulaire, infiniment mince, est fixe dans un plan vertical. En un point* A *du fil on abandonne sans vitesse un point pesant* M. *Ce point tombe suivant la verticale du point* A, *vient choquer le fil en* B, *puis en* C, *et ainsi de suite. Le fil et le point sont parfaitement élastiques.*

Peut-on choisir le point A *de manière que le point* C *lui soit diamétralement opposé sur le fil ? Cette condition étant réalisée, quel sera le mouvement du point* M ?

(Juillet 1908.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Deux roues identiques, homogènes et pesantes, de masse* M *et de rayon* R, *tournent librement autour de leurs centres* C *et* C_1 *reliés par deux tiges identiques* CA *et* C_1A, *homogènes et pesantes, de masse* m *et de longueur* $2l$, *qui sont articulées en* A. *Le système est abandonné dans le plan vertical* xOy *avec des vitesses contenues dans ce plan, les deux roues reposant sur la droite fixe inclinée* Ox, parfaitement lisse.

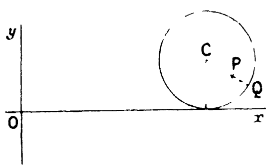
1° *Calculer le mouvement du système, en admettant que les deux roues restent en contact avec* Ox.

2° *Chaque roue pouvant se soulever au-dessus de* Ox, *quelle restriction est imposée aux conditions initiales pour que les deux roues restent en contact avec* Ox?

3° *Calculer le mouvement du même système en supposant, non plus que* Ox *est parfaitement lisse, mais que les deux roues sont assujetties à rouler* sans glisser *sur* Ox. *On admettra, pour traiter cette troisième question, que les roues restent en contact avec* Ox.

NOTA. — *On pourra prendre comme paramètres l'abscisse du milieu de* CC_1, *l'angle* $\theta = \frac{\widehat{CAC_1}}{2}$ *et les angles dont tournent les deux roues.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un disque circulaire plein, homogène, pesant* S, *de rayon égal à* 10^{cm} *et de masse* m, *porte*

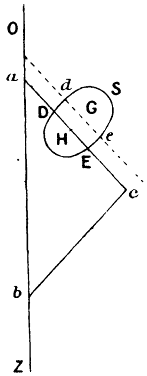


au milieu d'un de ses rayons CQ *une masse* P, *égale à* m, *qui lui est invariablement liée. Le solide* S *est abandonné sans vitesse dans le plan vertical* xOy *et repose sur une droite horizontale fixe* Ox *parfaitement lisse. L'angle de la position initiale de* CP *avec la verticale descendante étant de* $7°30'$, *calculer les petits mouvements de* S *en regardant cet angle comme un infiniment petit. Déterminer, en particulier, la période des oscillations de* CP *autour de* C. (Juillet 1907.)

I. ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un triangle abc isoscèle et rectangle formé de trois tiges pesantes, homogènes et de même densité, a les deux sommets a et b de son hypoténuse fixés sur la même verticale* Oz. *Le triangle abc tournant librement autour de cet axe fixe* Oz, *un solide de révolution* S, *homogène et pesant, a deux de ses points* D *et* E *fixés sur la tige ac, qui est parallèle à son axe de figure ed et tourne librement autour de cette tige ac. Le centre de gravité* G *de* S *se projette sur ac au milieu* H *de ac.*

1° *Calculer le mouvement du système abandonné dans* *des conditions initiales quelconques à l'action de la pesanteur.*

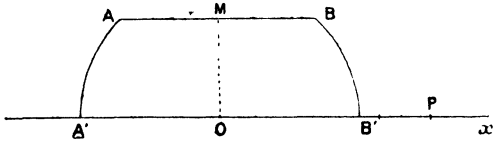
2° *Dans le cas particulier où* G *coïncide avec* H *et où* D *et* E *coïncident respectivement avec le milieu de* aH *et de*



cH, *quel est le mouvement du système? Quelles sont les réactions qui s'exercent sur* S *en* D *et* E *et sur le triangle* abc *en* a *et* b?

Notation. — *On pourra définir la position du système par l'angle* α *du plan* abc *avec un plan fixe* zOx *et par l'angle* β *du plan* abc *et du plan* acG. *On représente par* M *la masse totale du triangle* abc, *par* l *la longueur* ac, *par* μ *la masse de* S, *par* λ *la distance* GH, *par* C *le moment d'inertie de* S *autour de son axe de figure, et par* A *son moment d'inertie autour de* GH.

II. Épreuve pratique. — *On considère un corps de révolution* S *dont la méridienne se compose d'un segment de*



droite AB *parallèle à l'axe de révolution* Ox *et de deux arcs de cercle* AA′, BB′ *ayant comme centre la projection* *de* O *sur* Ox *du milieu* M *de* AB. *La distance* OM *ou* l *est égale à la moitié de* AB.

Le corps S *étant supposé plein et homogène, de densité* 1, *calculer :* 1° *le potentiel des attractions newtoniennes exercées par* S *sur une masse* P *égale à l'unité et située sur* Ox, *à la distance* x *de* O ;

2° *La résultante de ces attractions.*

On traitera d'abord le cas où P *est extérieur à* S, *puis le cas où* P *est intérieur à* S. (Octobre 1907.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Théorème de Coriolis. Application à l'étude des mouvements horizontaux à la surface terrestre.*

II. *Un store a la forme d'une surface rectangulaire pesante, homogène, parfaitement flexible, d'épaisseur négligeable. Le bord supérieur du store est horizontal et fixé à la paroi d'un mur vertical ; le bord inférieur s'attache à la surface d'un cylindre de révolution homogène et pesant, d'axe horizontal, autour duquel s'enroule le store. Sous l'action du poids le cylindre tombe et le store se déroule en s'appliquant sur le mur. Étudier le mouvement qui se produit pendant la phase de déroulement. On suppose qu'il y a une résistance verticale d'intensité constante appliquée au centre de gravité du cylindre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un corps solide pesant est muni de deux axes de suspension parallèles; le centre de gravité est situé entre les deux axes. En oscillant autour du premier, sous l'action de la pesanteur, il fait, en* 10 *minutes,* 488 *oscillations ; autour du second il en fait* 524 *dans la même période. La distance des deux axes est égale à* 1^{m},60. — *Calculer la distance du centre de gravité à chacun des axes et le rayon de gyration par rapport à un axe parallèle aux précédents, mené par le centre de gravité.*

(Juin 1908.)