Nouvelles annales de mathématiques

P. Favre

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1908). Solution de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 506-517

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__506_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1908).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

Par M. P. FAVRE.

Un contour convexe est formé des côtés parallèles AB, A'B' *de longueur* $2l$ *d'un rectangle* ABB'A' *et des demi-cercles de rayon* r *décrits sur les deux autres côtés* AA' *et* BB' *comme diamètres. Il se déplace dans son plan d'une façon continue en restant tangent extérieurement à un demi-cercle fixe de rayon* R *et à la droite indéfinie* D *qui limite ce demi-cercle. On suppose que* AB *était sur* D *au début du mouvement et que* A'B' *vient sur cette même droite à la fin du mouvement, après avoir touché le demi-cercle fixe.*

1° *Construire la trajectoire* Γ *du centre* M *du rectangle et reconnaître si elle est convexe.*

2° *Calculer l'aire limitée par* Γ, *dans l'hypothèse*

$$R = r, \qquad l = r(\sqrt{3} - 1).$$

3° *On suppose que l'angle dont tourne le contour est proportionnel au temps; on demande de placer le contour à un instant donné et de construire le vecteur vitesse du point* M *à cet instant.*

4° *Le côté* A'B' *étant tangent au demi-cercle fixe, trouver à un instant donné l'enveloppe des tangentes* *aux trajectoires des différents points du contour. Examiner les différents cas qui peuvent se présenter en supposant* $R = r = l$.

1° Le mouvement du contour se divise en trois phases :

Première phase : Le demi-cercle AA' est tangent au demi-cercle fixe et à la droite D;

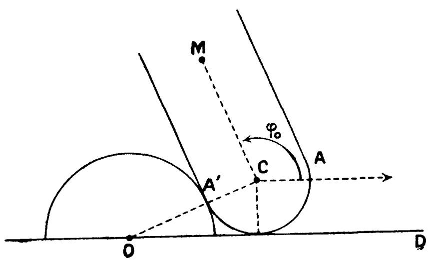
Deuxième phase : Le demi-cercle AA' est tangent à la droite D et le côté $A'B'$ est tangent au demi-cercle fixe;

Troisième phase : Le demi-cercle AA' est tangent à la droite D et le demi-cercle BB' est tangent au demi-cercle fixe.

Dans la première phase, le point M décrit un arc de cercle ayant pour centre C le milieu de AA' et l pour rayon.

Si l'on désigne par φ l'angle de rotation du contour,

Fig. 1.



la valeur φ_0 qui sépare la première phase de la deuxième est donnée (voir *fig.* 1) par la relation

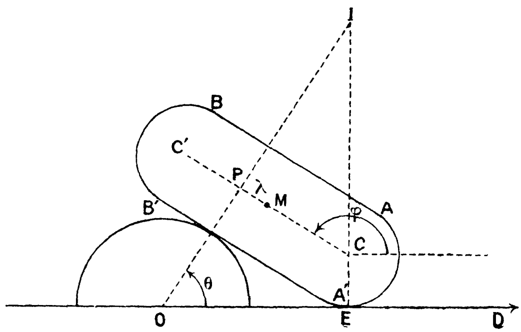
$$\sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{R^2 + 2Rr}}{R + r} \qquad \left(\varphi_0 > \frac{\pi}{2}\right).$$

En posant

$$\overline{\mathrm{PM}} = \lambda$$

et projetant le contour OPCE sur la droite D et sur

Fig. 2



une perpendiculaire, on a (*fig.* 2)

$$(\mathrm{R} + r) \sin\varphi - \lambda \cos\varphi = x,$$
$$-(\mathrm{R} + r) \cos\varphi - \lambda \sin\varphi = l \sin\varphi + r.$$

En éliminant λ on obtient la valeur de x. celle de y est immédiate, et les coordonnées de M dans la deuxième phase sont

$$x = \frac{(\mathrm{R} - r) - l \sin\varphi \cos\varphi + r \cos\varphi}{\sin\varphi},$$
$$y = l \sin\varphi + r.$$

Dans la première phase, la trajectoire Γ du point M, étant un arc de cercle, était convexe. Si elle devient concave, il faut que la transition se fasse par un point d'inflexion, c'est-à-dire que $\frac{dy}{dx}$ passe par un maximum ou un minimum. Et s'il n'y a pas de point d'inflexion la courbe Γ restera convexe. Pour résoudre cette question, il faut avoir $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$dx = -\frac{r + l\sin^3\varphi + (R + r)\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$
$$dy = l\cos\varphi\,d\varphi,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\,l\cos\varphi\sin^2\varphi}{l\sin^3\varphi + (R + r)\cos\varphi + r}.$$

Si l'on forme $\frac{d^2y}{dx^2}$ on obtient une fraction dont le dénominateur est un carré parfait qui ne devient pas infini et dont le numérateur est, après réductions,

$$l^2\sin^4\varphi - 2l(R + r)\sin\varphi\cos^3\varphi - lr\sin\varphi(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

ou

$$l^2\sin^4\varphi - 2lR\sin\varphi\cos^3\varphi + lr\sin\varphi(1 - 3\cos^2\varphi - 2\cos^3\varphi),$$

ou enfin

$$l^2\sin^4\varphi - 2lR\sin\varphi\cos^3\varphi + lr\sin\varphi(1 - 2\cos\varphi)(1 + \cos\varphi)^2.$$

Or, dans cette deuxième phase, φ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π; donc

$$\sin\varphi > 0, \qquad \cos\varphi < 0,$$

et l'expression ci-dessus est toujours positive.

Il n'y a donc pas de point d'inflexion dans la deuxième phase, et la trajectoire Γ est encore convexe.

Pour avoir la valeur de φ_1 qui marque la fin de la deuxième phase, projetons encore le contour OPCE (en remarquant qu'à ce moment $\lambda = l$) :

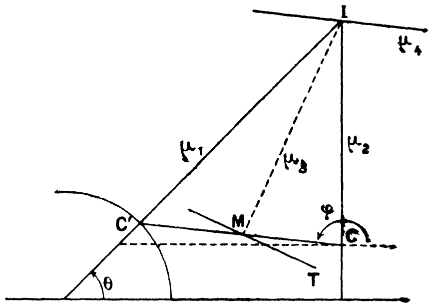
$$(R + r)\cos\varphi_1 + 2l\sin\varphi_1 + r = 0.$$

Dans la troisième phase (*fig.* 3), le milieu C' de BB' décrit un arc de cercle de centre O et de rayon $R + r$. Ses coordonnées sont, en désignant par θ l'angle C'OD,

$$x_{C'} = (R + r)\cos\theta, \qquad y_{C'} = (R + r)\sin\theta,$$

et le point C sera à l'intersection de la droite $y = r$ et

Fig. 3.



du cercle de centre C' et de rayon $2l$, dont l'équation est

$$[x - (R + r)\cos\theta]^2 + [y - (R + r)\sin\theta]^2 = 4l^2$$

(l'abscisse du point C devant être la plus grande). On en déduit, pour les coordonnées du point C,

$$x_C = (R + r)\cos\theta + \sqrt{4l^2 - [r - (R + r)\sin\theta]^2},$$
$$y_C = r.$$

Le point M étant le milieu du segment CC', ses coordonnées sont

$$x = (R + r)\cos\theta + \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - [r - (R + r)\sin\theta]^2},$$
$$y = \frac{(R + r)}{2}\sin\theta + \frac{r}{2}$$

(le radical est pris positivement).

Pour voir si la courbe est encore convexe, c'est-à-dire ne présente pas de point d'inflexion dans cette troisième phase, nous utiliserons la remarque suivante :

I étant le centre instantané de rotation, les trois droites IC', IM, IC et la parallèle à C'C menée par I forment une proportion harmonique

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} : \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4} = -1;$$

or

$$\mu_1 = \operatorname{tang}\theta, \qquad \mu_4 = \operatorname{tang}\varphi$$

et μ_2 est infini; donc

$$\mu_3 = 2\mu_1 - \mu_4 = 2\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\varphi.$$

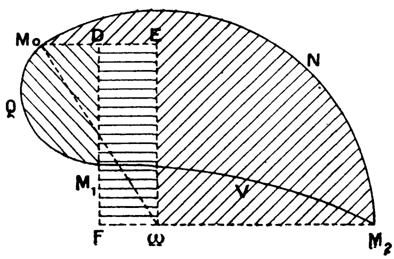
Si μ est le coefficient angulaire de la tangente à Γ,

$$\mu = -\frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi - 2\operatorname{tang}\theta}.$$

Cette formule montre que dans la troisième phase le coefficient angulaire de la tangente est toujours négatif, et va en croissant en valeur absolue.

Au contraire, dans la deuxième phase, $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant positive, la valeur *algébrique* du coefficient angulaire va

Fig. 4.



en croissant. Il y a donc un point d'inflexion en M_1 et la courbe Γ n'est pas convexe.

L'expression ci-dessus de μ permet de trouver les tangentes en M_1 et en M_2

$$\mu' = -0{,}247, \qquad \mu'' = -0{,}866.$$

De tout ce qui précède résulte pour Γ la forme ci-contre (*fig.* 4).

2° Si l'on suppose

$$R = r, \qquad l = r(\sqrt{3} - 1),$$

et si l'on se reporte aux formules qui donnent les valeurs φ_0 et φ_1 séparant entre elles les trois phases, on trouve

$$\varphi_0 = 120^\circ \quad \text{et} \quad \varphi_1 = 150^\circ.$$

Les formules trouvées dans la deuxième phase donnent, pour les coordonnées de M_0,

$$x_0 = 1,366\,r, \qquad y_0 = 1,634\,r,$$

et, pour les coordonnées de M_1,

$$x_1 = 1,634\,r, \qquad y_1 = 1,366\,r.$$

ω étant le centre (fixe) de rotation dans la première phase, ses coordonnées sont

$$x_\omega = r\sqrt{3}, \qquad y_\omega = r.$$

Pour évaluer l'aire limitée par Γ, nous poserons

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{aire } M_2NM_0E\omega M_2, \\ S_2 &= \text{aire du rectangle } EDF\omega, \\ S_3 &= \text{aire } M_0QM_1DM_0, \\ S_4 &= \text{aire } M_1FM_2VM_1, \end{aligned}$$

et nous aurons

$$S = S_1 + S_2 + S_3 - S_4.$$

Aire S_1. — Elle est égale à l'aire du secteur circulaire ωM_2NM_0 diminuée de celle du triangle $M_0E\omega$:

$$S_1 = \frac{3,1416 \times \overline{0,732}^2}{3}\,r^2 - \frac{0,366 \times 0,634}{2}\,r^2,$$

$$S_1 = (0,561 - 0,116)\,r^2 = 0,445\,r^2.$$

Aire S_2. — Les dimensions du rectangle sont

$$x_\omega - x_1 = 0,098\,r, \qquad y_0 - y_\omega = 0,634\,r;$$

donc

$$S_2 = 0,062\,r^2.$$

Aire S_3. — Cette aire est représentée par l'intégrale définie

$$S_3 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} (x_1 - x)\,dy$$

ou

$$\begin{aligned}
S_3 &= r^2 \int \left(1,634 - \frac{2 + 0,732 \sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi}{\sin\varphi}\right) 0,732\cos\varphi\,d\varphi \\
&= 0,732\,r^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \left(1,634\cos\varphi - 2\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - 0,732\cos^2\varphi - \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\right) d\varphi \\
&= 0,732\,r^2 \int_{150^\circ}^{120^\circ} \left(1,634\cos\varphi - 2\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{0,732}{2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{0,732}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{\sin\varphi} + \sin\varphi\right) d\varphi.
\end{aligned}$$

Les quadratures indiquées s'effectuent de suite :

$$\begin{aligned}
S_3 = 0,732\,r^2 &\left(1,634\sin\varphi - 2\,\mathrm{Log}\sin\varphi - 0,366\,\varphi\right. \\
&\left. - 0,183\sin 2\varphi - \mathrm{Log\,tang}\,\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right)_{150^\circ}^{120^\circ}.
\end{aligned}$$

En substituant les limites et réduisant :

$$S_3 = 0,732\,r^2 \left(0,366\,\frac{\pi}{6} + 0,634\,\frac{0,732}{2} + \mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{tang}\,75^\circ}{3\,\mathrm{tang}\,60^\circ}\right)$$

(les Tables usuelles donnant le logarithme vulgaire, il faut le multiplier par 2,3026 pour avoir le logarithme naturel),

$$S_3 = 0,068\,r^2.$$

Aire S_4. — Cette aire est représentée par l'intégrale définie

$$S_4 = \int_{\theta_2}^{\theta_1} (x - x_1)\, dy.$$

D'ailleurs

$$\theta_1 = 60^\circ \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = 30^\circ.$$

En remplaçant x et dy par leurs valeurs en fonction de θ, on obtient

$$S_4 = \int_{30^\circ}^{60^\circ} \Big[(R + r)\cos\theta + \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - [r - (R+r)\sin\theta]^2} - 1,634\, r \Big] \frac{R+r}{2} \cos\theta\, d\theta,$$

$$S_4 = r^2 \int_{30^\circ}^{60^\circ} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta - 1,634\, r^2 \int_{30^\circ}^{60^\circ} \cos\theta\, d\theta - \frac{r^2}{4} \int_0^{-0,732} \sqrt{2,143 - t^2}\, dt,$$

en posant

$$1 - 2\sin\theta = t,$$

$$S_4 = r^2 \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)_{30^\circ}^{60^\circ} - 1,634\, r^2 (\sin\theta)_{30^\circ}^{60^\circ} - \frac{r^2}{4}\left(2,143 \arcsin \frac{t}{\sqrt{2,143}} + \frac{t\sqrt{2,143 - t^2}}{2}\right)_0^{-0,732},$$

$$S_4 = r^2 (0,524 - 0,598 + 0,140 + 0,115),$$

$$S_4 = 0,181\, r^2,$$

d'où

$$S = 0,394\, r^2.$$

3° Soient I le centre instantané à un moment donné et ω la vitesse angulaire de rotation. Le vecteur vitesse du point M a pour valeur

$$V = \omega\, \overline{\mathrm{IM}}.$$

Si l'on connaît la ligne IM et si l'on construit l'angle α tel que

$$\operatorname{tang} \alpha = \omega,$$

le vecteur vitesse sera le second côté de l'angle droit dans un triangle rectangle admettant IM pour autre côté de l'angle droit et α pour angle aigu.

La construction de M dans la première phase est immédiate, puisqu'il se meut sur un cercle connu.

Pour la deuxième phase, on construira le cercle de centre O et de rayon $R + r$, on lui mènera une tangente faisant l'angle $\varphi = \omega t$ avec la direction positive de la droite D (voir *fig.* 2), et l'on prendra sur cette tangente un point C à la distance r de D.

Pour la troisième phase, on construira encore le même cercle fixe, et l'on cherchera à placer un segment CC' de longueur $2l$ incliné de l'angle φ sur D, et s'appuyant à la fois sur le cercle fixe et sur la droite $y = r$. On arrivera facilement à ce résultat en imprimant à la droite $y = r$ une translation convenable qui donnera le point C'.

4° L'enveloppe se compose de quatre fragments de coniques qui se raccordent de façon à former une courbe continue, mais qui peut avoir des asymptotes. Il y a deux coniques à centre et deux paraboles. Elles admettent toutes les quatre pour foyer le centre instantané I au moment considéré. Les tangentes au sommet des deux paraboles sont les droites AB et A'B'. Les cercles principaux des coniques à centre sont ceux décrits sur AA' et BB' comme diamètres. Dans le cas proposé ($R = r = l$), ils sont tangents extérieurement, et par suite les deux coniques à centre ne peuvent être simultanément des ellipses.

Pour savoir si ce sont deux hyperboles ou bien une ellipse et une hyperbole, nous allons former les équations des deux cercles principaux

$$f_1(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_2(x, y) = 0$$

et voir si les coordonnées du point I rendent l'expression

$$f_1(x, y) f_2(x, y)$$

positive ou négative.

Si cette expression était nulle, l'une des deux coniques à centre serait un cercle. Les coordonnées du point C sont

$$x = \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} r, \qquad y = r;$$

donc

$$f_1(x, y) \equiv \left(x - \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} r\right)^2 + (y - r)^2 - r^2 = 0.$$

Les coordonnées du point C′ sont

$$x = \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} r - 2r\sin\theta,$$

$$y = (1 + 2\cos\theta) r:$$

donc

$$f_2(x, y) \equiv \left(x - \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} r - 2r\sin\theta\right)^2$$
$$+ [y - (1 + 2\cos\theta) r]^2 - r^2 = 0.$$

En remarquant que le point I a même abscisse que le point C et que la droite OI a pour coefficient angulaire $\operatorname{tang}\theta$, on obtient pour les coordonnées du point I

$$X = \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} r,$$

$$Y = \frac{(2 - \sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta} r.$$

En substituant on trouve

$$\frac{f_1(X, Y)}{r^2} \equiv \frac{(2\sin\theta - 1)^2}{\cos^4\theta} - 1,$$

$$\frac{f_2(X, Y)}{r^2} \equiv 4\sin^2\theta + \left(\frac{2\sin\theta - 2\cos^3\theta - 1}{\cos^2\theta}\right)^2 - 1.$$

Posons

$$\Phi(\theta) = \frac{f_1(X, Y) f_2(X, Y)}{r^4}:$$

Si $\Phi(\theta) < 0$, on aura une ellipse et une hyperbole;
Si $\Phi(\theta) > 0$, on aura deux hyperboles.