NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 474-477

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__474_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1955.

(1903, p. 47.)

Étant donnés deux droites fixes rectangulaires Ox, Oy *et un cercle* C *qui passe en* O, *l'enveloppe des droites dont les segments limités à* Ox, Oy *ont leur milieu sur le cercle est une hypocycloïde triangulaire* H_3.

Montrer géométriquement que l'enveloppe de cette courbe H_3, *quand le cercle* C *de rayon constant tourne autour du point* O, *est une hypocycloïde quadrangulaire* H_4.

(R. Gilbert).

SOLUTION

Par M. R. GILBERT.

Soit AB une droite dont le milieu M est sur C; si P est le point de OM tel que OP = 2OM, le lieu du point P est un cercle de centre D diamétralement opposé au point O sur le cercle C. D'ailleurs, si E_1 F sont les points où Ox, Oy coupent C', AB est la droite de Simpson du point P par rapport au triangle OEF. Donc AB enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements, H_3; le cercle inscrit à cette courbe est le cercle des neuf points du triangle OEF, c'est-à-dire le cercle C.

Designons par G le point où la droite OD coupe à nouveau le cercle C' et GK la perpendiculaire abaissée sur EF.

La droite EF est une des positions de AB; le point K est le point où elle touche H_3. En effet, considérons une droite AB infiniment voisine de EF; comme AB est la droite de Simpson du point P, si PQ est la perpendiculaire abaissée de P sur EF, Q est le point de rencontre de AB et EF. Donc, quand AB tend vers EF, Q tend vers le point de contact de EF avec son enveloppe, et, d'autre part, il coïncide avec le pied K de la perpendiculaire GK à EF.

On verrait de la même façon que la courbe H_3 est tangente à Ox, Oy en E_1, F. Si maintenant le cercle C de rayon constant se meut en passant constamment en O, la courbe H_3 de grandeur invariable étant tangente à Ox, Oy en E, F, le centre instantané de rotation est le point G. Mais le segment EF de longueur constante est aussi une figure invariable, et, dans le mouvement de cette figure, le centre instantané de rotation est aussi le point G; la droite EF enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, H_4, à laquelle elle est tangente en K. Ainsi H_3 et H_4 sont tangentes en ce point; comme d'ailleurs les autres normales menées de G à H_3 sont GE, GF, la courbe H_4 est, avec Ox, Oy, l'enveloppe de H_3.

Remarque. — On peut résoudre de même le problème plus général suivant : *Trouver l'enveloppe d'une hypocycloïde à trois rebroussements de grandeur constante tangente à deux droites fixes quelconques* Ox, Oy.

Soient en effet S, T les points de contact sur Ox, Oy; S' le point de rencontre des perpendiculaires SS' à Ox et OS' à Oy : T' le point de rencontre des perpendiculaires TT' à Oy et OT' à Ox. Le cercle C'', circonscrit au triangle $OS'T'$, coupe Ox, Oy en E, F.

L'hypocycloïde à trois rebroussements est l'enveloppe des droites de Simpson du triangle OEF ; son cercle inscrit est le cercle des neuf points de ce triangle ; il s'ensuit que le cercle C' est de grandeur constante, et par suite aussi le segment EF.

D'autre part, dans le mouvement de l'hypocycloïde, le centre instantané de rotation est le point de rencontre G de SS', TT' ; dans le mouvement de la figure invariable EF, le centre instantané est le point G' diamétralement opposé à O sur le cercle C' ; ces deux points sont sur une même perpendiculaire GKG' à EF, car GG' est une hauteur du triangle $G'S'T'$. Donc l'enveloppe de l'hypocycloïde est la courbe enveloppe des droites EF.

2049.

(1906, p. 180.)

On joint un point O *aux points* I, H, K *où une sécante* X *coupe les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, *et dans le faisceau* O *on inscrit un triangle quelconque* $A_1B_1C_1$ *dont les côtés* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *rencontrent la sécante en* I_1, H_1, K_1.

I. *Les droites* AI_1, BH_1, CK_1 *sont concourantes en un point* O_1.

II. *Si les droites* AO, BO, CO *coupent les côtés correspondants de* $A_1B_1C_1$ *en* P_1, Q_1, R_1 *et si les droites* A_1O_1, B_1O_1, C_1O_1 *coupent les côtés de* ABC *en* P, Q, R, *les six points* P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 *sont situés sur une droite* X_1, *et les droites* X, X_1, OO_1 *sont concourantes.*

(P. Sondat.)

SOLUTION

Par l'Auteur.

I. La sécante X coupe les côtés de ABC et les droites joignant le point O à ses sommets en six points I_1, H_1, K_1 et I, H, K en involution.

En considérant la droite X comme sécante dans le triangle ABC, il résulte de cette involution que les droites AI_1, BH_1, CK_1 doivent être concourantes en un point O_1.

II. Les droites qui joignent le point O aux sommets de ABC et aux points I, H, K où les côtés sont coupés par X forment un faisceau en involution. Or trois des rayons de ce faisceau passent par les sommets de $A_1B_1C_1$ et, par suite, les rayons associés doivent couper les côtés en trois points P_1, Q_1, R_1 en ligne droite.

Les droites qui joignent O_1 aux sommets de $A_1B_1C_1$ et aux points I_1, H_1, K_1 où les côtés sont coupés par X forment aussi un faisceau en involution. Or trois des rayons passent par les sommets de ABC et, par suite, les trois autres doivent couper les côtés de ABC en trois points P, Q, R en ligne droite.

Appelant w le point (X, OO_1), il résulte des pascales

$$AI_1HB_1QP_1,$$
$$AI_1KC_1RP_1$$

que les droites P_1Q et P_1R passent par w. Les quatre points P_1, Q, R, w sont donc alignés et, comme P appartient à QR, on a la droite

(1) $$PP_1QRw.$$

Il résulte des pascales

$$A_1IH_1BQ_1P,$$
$$A_1IK_1CR_1P$$

que les droites PQ_1, PR_1 passent par w. Les quatre points P, Q_1, R_1, w sont donc alignés, et, comme P_1 appartient à Q_1R_1, on a la droite

(2) $$PP_1Q_1R_1w.$$

D'ailleurs les droites (1) et (2), qui ont trois points communs, se superposent.

Remarque. — Si les côtés de $A_1B_1C_1$ sont perpendiculaires à ceux de ABC, en prenant pour O l'orthocentre de $A_1B_1C_1$, X passant à l'infini, O_1 sera l'orthocentre de ABC, et les droites X_1 et OO_1 seront parallèles.