Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 413-419

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__413_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

On considère la surface S *définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$x = e^{-u}\cos v, \qquad y = e^{-u}\sin v, \qquad z = \int_0^u du\sqrt{1 - e^{-2u}}.$$

1° *Effectuer l'intégration qui donne la valeur de* z;

2° *Montrer que* S *est de révolution autour de* OZ *et que la portion d'une tangente à une méridienne comprise entre* OZ *et le point de contact a une longueur constante. Forme de la méridienne : calcul de son rayon de courbure;*

3° *Déterminer les asymptotiques de* S : *projection,* sur OXY *des asymptotiques se croisant au point où* u *et* v *sont nuls.*

SOLUTION.

$$z = \mathrm{L}\left(e^u + \sqrt{e^{2u} - 1}\right) - \sqrt{1 - e^{-2u}}.$$

3° $$dz = -\sqrt{e^{2u} - 1}\,(\cos v\,dx + \sin v\,dy).$$

On en déduit p, q et l'on forme l'équation

$$dp\,dx + dq\,dy = 0;$$

le rayon vecteur r d'un point de la projection est e^{-u} et l'équation de cette projection sur OXY

$$dv = \pm \frac{dr}{r\sqrt{1-r^2}}.$$

(Juillet 1907.)

Lille.

I. Analyse. — 1° Ox, Oy et Oz *étant trois axes rectangulaires, construire la lemniscate* (C) *représentée par les équations*

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), \qquad z = 0,$$

où a désigne une longueur donnée; montrer qu'il existe sur Ox deux points F, F' tels que le produit des distances d'un point quelconque de la lemniscate à F et F' ait une valeur constante.

2° *Écrire l'équation de la surface de révolution* (S) *engendrée par la rotation de* (C) *autour de Ox, indiquer la forme de l'intersection de* (S) *et d'un plan parallèle à xOy.*

3° *Calculer le volume de la portion de l'espace intérieure à cette surface* (S).

4° *Former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des lemniscates représentées par l'équation* (1) *quand a varie, construire l'une de ces trajectoires orthogonales.*

5° *Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par la sphère* (Σ):

$$x^2+y^2+z^2 = a^2$$

et par le cylindre qui a pour base la lemniscate (C) *et dont les génératrices sont parallèles à Oz ainsi que l'aire de la partie de la surface de* (Σ) *comprise à l'intérieur du cylindre.*

II. Mécanique. — 1° *Théorème des moments des quan-*

tités de mouvement pour un point matériel et pour un système. Équation du mouvement d'un solide mobile sans frottement autour d'un axe fixe.

2° *On donne le poids* P *d'un solide* S *qui peut osciller librement autour d'un axe fixe horizontal* OZ, *la distance* $OG = a$ *du centre de gravité* G *de ce solide à l'axe* OZ, *la durée* t *des petites oscillations du pendule ainsi obtenu, le poids* p *et le rayon* r *d'une sphère homogène* C; *et l'on demande de déterminer la durée* x *des petites oscillations du deuxième pendule obtenu en fixant invariablement la sphère* C *au solide* S, *de façon que son centre* C *soit sur le prolongement de* OG *à une distance* $OC = b$ *de l'axe* OZ.

On prendra

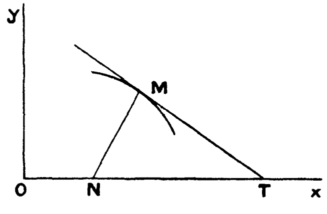
$$P = 5^{kg}, \qquad a = 1^m,5, \qquad t = 1^s,4,$$
$$p = 3^{kg}, \qquad r = 0^m,07, \qquad b = 2^m,4.$$

(Juillet 1907.)

Lyon.

Poser l'équation différentielle des courbes C *telles que*

$$OT.ON = c^2 = \text{const.}$$



On intégrera en posant $x^2 = u$, $y^2 = v$.

Par un point P *du plan passent deux courbes* C_1 *et* C_2. *Si* P *a pour coordonnées* $x = c, y = \frac{c}{\sqrt{2}}$, C_1 *est une ellipse,* C_2 *est une hyperbole.* C_2 *divise* C_1 *en trois parties, dont on demande de calculer les aires.*

SOLUTION.

On a

$$OT = x - \frac{y}{y'}, \qquad ON = x + yy',$$

(1) $$x^2 - y^2 + xy\left(y' - \frac{1}{y'}\right) = c^2,$$

c'est-à-dire

(2) $$c^2 = u - v + \frac{u\,dv^2 - v\,du^2}{du\,dv}.$$

Traitons u et v comme des coordonnées avec $p = \frac{dv}{du}$. On a l'équation de Clairaut

(3) $$\left\{\begin{aligned} &v = pu - c^2\frac{p}{1+p} \\ &\text{ou} \\ &up^2 - p(v - u + c^2) - v = 0. \end{aligned}\right.$$

Les courbes intégrales de (3) sont les tangentes à la conique H

$$0 = (v - u + c^2)^2 + 4uv;$$

les courbes intégrales de (1) sont donc des coniques h, orthogonales, homofocales

$$c^2\frac{p}{1+p} = px^2 - y^2 \qquad (p = \text{paramètre arbitraire})$$

à foyers fixes $y = 0$, $x = \pm c$, etc. (Juillet 1907.)

Montpellier.

Une courbe est représentée par rapport à deux axes rectangulaires par les équations

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a\cos t.$$

1° *Calculer la longueur de l'arc de courbe compris entre les points correspondant à $t = -\pi$ et $t = +\pi$.*

2° *En un point quelconque* M, *déterminer le centre de courbure* C *et le rayon de courbure.*

3° *Trouver le lieu du centre de courbure, et montrer que ce lieu, et la première courbe, ont des formes identiques.*

4° C *étant le centre de courbure au point* M *de la première courbe, trouver le lieu du milieu de la droite* MC.

5° *Trouver l'enveloppe de la droite perpendiculaire à* MC *menée par son milieu.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'ellipsoïde de révolution engendré par la rotation de l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

autour de Ox, *puis un cône de révolution autour du même axe, circonscrit à l'ellipsoïde précédent. On prend pour base de ce cône le plan engendré par* Oy *en vertu de la même rotation.*

Minimum du volume de ce cône?

On étudiera plus généralement la variation de ce volume en faisant usage d'une représentation graphique.

N. B. — *On prendra pour variable* α, *la distance du sommet du cône au point* O. (Juillet 1907.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On donne l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{a}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)y=0,$$

où a et b désignent deux constantes positives.

1° *Trouver une solution* $y=f(x)$ *de cette équation, telle que pour* $x=0$ *on ait*

$$y=h \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}=0.$$

2° *Construire la courbe qui représente la variation de la fonction* $y=f(x)$ *ainsi déterminée, en supposant que* x *croisse de* 0 *à* $+\infty$. *Calculer les coordonnées des points où* *la tangente est parallèle à* Ox *et les valeurs du rayon de courbure en ces mêmes points.*

II. *Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{a}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{a^2}y = e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}},$$

a et c désignant deux constantes positives.

Examiner les cas particuliers où $c = \pm a$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'enveloppe de la droite définie par l'équation*

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = 2\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha,$$

α *désignant un paramètre variable.*

Trouver : 1° *les coordonnées d'un point de l'enveloppe en fonction du paramètre* α;

2° *La longueur d'arc comptée à partir du point correspondant à* $\alpha = 0$;

3° *L'expression du rayon de courbure.*

(Novembre 1906.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Trouver l'intégrale générale du système d'équations différentielles*

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = +\sqrt{a^2 - y^2}, \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a^2 - y^2}{y}. \end{cases}$$

Montrer que, si l'on détermine les constantes d'équation de manière à satisfaire aux conditions initiales suivantes :

pour $t = \frac{\pi}{2}$

$$x = 0, \qquad y = a,$$

on a

$$(2)\qquad y = a\sin t, \qquad x = a\log\operatorname{tang}\frac{t}{2} + a\cos t.$$

Étudier la courbe définie par les équations (2).

Calculer en fonction de t : 1° l'angle de la tangente avec Oy; 2° la longueur de l'arc compté à partir du point A qui correspond à la valeur $t = \frac{\pi}{2}$; 3° le rayon de courbure; 4° les coordonnées du centre de courbure; 5° l'aire comprise entre la courbe, l'axe des y, l'axe des x et une ordonnée variable : cette aire tend vers une valeur déterminée quand l'ordonnée limite s'éloigne indéfiniment. Reconnaître la nature de la développée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation différentielle linéaire*

$$y' - \frac{1 + 3x^2}{x(1 + x^2)} y = \frac{x(1 - x^2)}{1 + x^2},$$

et déterminer la constante de façon que l'on ait $y = 0$ pour $x = 1$.

2° *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

(Juin 1907.)