Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 381-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__381_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2054.

(1905, p. 278.)

Les axes des coniques ayant un contact du troisième ordre avec une courbe en un point M *donné sont tangentes à une parabole.* (A. PELLET.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Prenons pour axe des x et des y la tangente et la normale à la courbe en M et soit

$$au^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0$$

l'équation tangentielle d'une conique ayant, avec la courbe donnee, un contact du troisième ordre au point M.

L'équation générale des coniques de l'énoncé sera

$$f(u, v, w) = au^2 + \lambda w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0$$

(λ paramètre variable).

Les axes sont définis par

$$\frac{f'_u}{u} = \frac{f'_v}{v},$$

$$f'_w = 0.$$

La première de ces équations, qui s'écrit

$$auv + b'vw - bwu = 0,$$

ne dépend pas du paramètre λ; c'est donc l'équation de l'enveloppe des axes. Elle représente une parabole tangente à Ox et à Oy au point d'ordonnée $-\frac{a}{b}$ qui est le centre de courbure de la courbe en M.

Autre solution de M. LAUREAUX.

NOTE

Par M. KLUG.

Si des coniques k_i sont inscrites dans un quadrilatère et si c est une conique quelconque du même plan, les côtés des triangles polaires communs à c et à chaque conique du système k_i sont tangentes à une courbe de troisième classe (P.-E. SCHRÖTER : *Theorie d. Kegelschnitte*, III. Aufl., p. 417).

Mais, si la conique c est la conique absolue (l'intersection d'un cercle avec la droite à l'infini), les côtés de ces triangles sont les axes des coniques k_i et la droite à l'infini. On peut donc dire : *les axes de toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère sont tangentes à une courbe de troisième classe*.

Si les coniques k_i sont inscrites dans un quadrilatère qui est circonscrit à un cercle ou si les coniques k_i ont un double contact : les axes des coniques k_i sont les tangentes à une parabole et les droites qui passent dans le premier cas par le centre du cercle, dans le second cas par le point à l'infini de la droite qui est rectangulaire sur la corde de contact.

Si enfin les coniques k_i ont un contact du troisième ordre au point M, les axes des coniques restent les tangentes d'une parabole et, si l'une quelconque de ces coniques a un contact du troisième ordre avec une courbe donnée au point M, toutes les autres ont aussi ce même contact avec cette courbe.

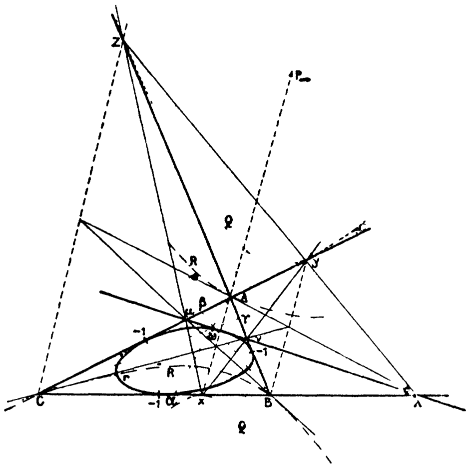
2058.

(1906, p. 576.)

Dans le triangle ABC *on mène les parallèles* Ax, By, Cz *à une direction donnée. Démontrer que l'axe d'homologie* $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ *des triangles* ABC *et* xyz *touche l'ellipse tangente aux milieux des côtés de* ABC *en un point* ω *qui* *est le centre commun à la conique* Q *inscrite à* ABC *en* x, y, z *et à la conique* R *inscrite en* A, B, C *au triangle des droites* Aλ, Bμ, Cν. (P. Sondat).

SOLUTION
Par M. P. Sondat.

Soit P(x, y, z) un point à l'infini dans le plan du tiiangle



de référence ABC (*voir* la figure). On a

$$(1) \qquad \frac{1}{x} + y = 1,$$

d'où

$$(2) \qquad y = \frac{x-1}{x}, \qquad z = \frac{1}{1-x}.$$

Si $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ est la polaire de P,

$$(3) \qquad \lambda = -x, \qquad \mu = -y, \qquad \nu = -$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$(4) \qquad \frac{-1}{\lambda} + \frac{\mu}{-1} = 1,$$

où Δ enveloppe l'ellipse r tangente aux milieux $-1, -1, -1$, des côtés de ABC.

Si $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ est le point de contact,

$$(5)\qquad \begin{cases} \alpha = -\lambda^2, & \beta = -\mu^2, & \gamma = -\nu^2, \\ \alpha = -x^2, & \beta = -y^2, & \gamma = -z^2. \end{cases}$$

Le centre $\theta(x, y, z)$ de la conique Q inscrite à ABC en x, y, z est donné par les formules

$$X = \frac{1-z}{z(1-y)}, \qquad Y = \frac{1-x}{x(1-z)}, \qquad Z = \frac{1-y}{y(1-x)},$$

ou (2)

$$X = -x^2, \qquad Y = -y^2, \qquad Z = -z^2.$$

Donc θ est en ω.

Le centre $\theta_1(X_1, Y_1, Z_1)$ de la conique R inscrite en A, B, C au triangle des droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ est donné par

$$-X_1 = \frac{\lambda(1-\lambda+\lambda\mu)}{-1+\lambda+\lambda\mu},$$

$$-Y_1 = \frac{\mu(1+\lambda-\lambda\mu)}{1-\lambda+\lambda\mu},$$

$$-Z_1 = \frac{\nu(-1+\lambda+\lambda\mu)}{1+\lambda-\lambda\mu},$$

ou (3) et (2)

$$X_1 = -x^2, \qquad Y_1 = -y^2, \qquad Z_1 = = z^2.$$

Donc θ_1 est aussi en ω.

Remarque. — L'équation (4) exprime aussi que R passe par le centre de gravité G de ABC, ce qui devait être, puisque le centre θ de R appartient à r, qui est le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrangle GABC.

Autre solution par M. LAUREAUX.