Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 335-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__335_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 1793 et 1794.

(1898, p. 195-196.)

1793. *Si* S_2 *désigne un carré ou une somme de carrés tous différents entre eux, tout nombre entier est de la forme* $S_2 + p$ $(p = 0, 1, 2, 4)$. (E. LEMOINE.)

1794. S_3 *représentant un cube ou une somme de cubes tous différents et* p_1 *l'un des nombres* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, *tout nombre entier est de la forme* $S_3 + p_1$, *au moins pour une valeur de* p_1. (E. LEMOINE.)

SOLUTION

Par M. L. RIPERT.

Démontrons d'abord le théorème suivant : *Tout nombre entier est de la forme* $S_n + p_1$, *n étant un nombre arbitrairement choisi,* S_n *représentant une* $n^{\text{ième}}$ *puissance ou somme de* $n^{\text{ièmes}}$ *puissances toutes différentes et p un nombre moindre que* $(n+1)^n - \Sigma_{\lambda=1}^{\lambda=n} \lambda^n$.

En effet, l'équation $2x^n - (x+1)^n = 0$ a une seule racine positive comprise entre n et $n+1$. Il en résulte que, a^n étant la plus grande $n^{\text{ième}}$ puissance contenue dans un nombre A, et en supposant $a > n$, on a toujours $A - a^n = B (< a^n)$. De même, et avec la même condition : $B - b^n = C (< b^n)$, $C - c^n = D (< c^n)$, ... Par suite :

$$A = a^n + b^n + c^n + \ldots + k^n + p,$$

avec $a > b > \ldots > k > n$, et $p < (n+1)^n$.

Les puissances $a_1^n \ldots k^n$ sont donc toutes différentes, et une *limite supérieure* de p est $(n+1)^n - 1$.

Le plus petit nombre k étant au moins égal à $n+1$, on peut retrancher la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances moindres que $(n+1)^n$ et le *maximum* de p est $p_m = (n+1)^n - \Sigma_1^n \lambda^n - 1$.

C. Q. F. D.

La limite supérieure $[p = (n+1)^n - 1]$ suffit pour démontrer les théorèmes 1793 et 1794.

En effet, si $n = 2$, p ne peut dépasser $8 = 2^2 + 4$ (d'où $p_1 = 4$). On a ensuite

$$\begin{array}{ll} p = 7 = 1^2 + 2^2 + 2 & (p_1 = 2), \\ p = 6 = 1^2 + 2^2 + 1 & (p_1 = 1), \\ p = 5 = 1^2 + 2^2 & (p_1 = 0), \\ p = 4 = 2^2 & (p_1 = 0), \\ p = 3 = 1^2 + 2 & (p_1 = 2), \\ p = 2, & \\ p = 1. & \end{array}$$

A cause de $8 = 2^2 + 4 = 1^2 + 2^2 + 3$, on peut remplacer $(p = 0, 1, 2, 4)$ par $(p = 0, 1, 2, 3)$.

Si $n = 3$, p ne peut dépasser $63 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 27$ (d'où $p_1 = 27$). On a ensuite :

$$\begin{array}{ll} 62 = 2^3 + 3^3 + 27 & (p_1 = 27), \\ 61 = 1^3 + 3^3 + 33 & (p_1 = 33), \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots, \\ 56 = 1^3 + 3^3 + 28 & (p_1 = 28), \end{array}$$

et l'on reconnaît aisément que tous les nombres inférieurs sont de la forme $s_3 + p_1$, s_3 étant l'un ou la somme de deux ou trois des cubes $(1, 8, 27)$ et p_1 ayant l'une des valeurs inférieures à 28 indiquées par l'énoncé 1794. On peut, dans cet énoncé, retrancher de la suite p_1 les nombres 3, 11, 13, 15 qui ne sont pas indispensables à la décomposition des nombres inférieurs à 64. Enfin, à cause de $33 = 2^3 + 25$, ..., $28 = 2^3 + 20$, on peut adopter le maximum $p_m = 27$, à la condition de remplacer (28, 29, 30, 31, 32, 33) par (20, 21, 22, 23, 24, 25).

Pour $n = 4, 5, \dots$, on a

$$\begin{array}{lll} p = 624, & 7775, & \dots, \\ p_m = 270, & 3350, & \dots. \end{array}$$

Autres solutions de M. MERLIN.