NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. GALLUCCI

Géométrie du cercle dans le plan. Deuxième concours des « Nouvelles annales » pour 1899

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 145-169

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__145_0>

[K11]

GÉOMÉTRIE DU CERCLE DANS LE PLAN.

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1899;

PAR M. G. GALLUCCI.

Sujet.

L'équation d'un cercle rapporté à deux axes rectangulaires, situés dans son plan, peut se mettre sous la forme

$$(1)\qquad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,$$

en posant

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_1, & y = y_1, \\ \dfrac{x^2+y^2+1}{2i} = x_3, & \dfrac{1-x^2-y^2}{2i} = x_4, \end{cases}$$

de sorte que les variables x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont à la relation

$$(3)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

On peut appeler les quatre quantités u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées du cercle, et l'on peut dire : 1° que toute relation homogène entre ces quantités définit un réseau *de cercles; 2° que deux relations homogènes définissent une* série *de cercles; 3° que trois relations homogènes définissent un* système *de cercles d'après les degrés des équations qui les définissent.*

I. *Interpréter, en Géométrie à trois dimensions, les* *équations* (1) *et* (3), *qui définissent le cercle, et les formules* (2), *qui conduisent à cette définition. En déduire les propriétés des réseaux et des séries linéaires de cercles.*

II. *Étudier en particulier et aussi complètement que possible les propriétés des réseaux quadratiques, c'est-à-dire des réseaux définis par une équation homogène et du second degré en* u_1, u_2, u_3, u_4. *Rapprocher ces propriétés de celles des surfaces du second ordre.*

III. *Montrer comment l'étude des systèmes de cercles faite d'après cet ordre d'idées permet de construire un cercle tangent à trois cercles donnés par une méthode différente de la célèbre méthode de Gergonne.*

Développement.

Dans le développement qui suit, nous nous limitons aux résultats principaux que nous exposons en trois paragraphes.

Chacun de ces paragraphes est suivi d'une série de notes et d'exercices qui en complètent l'argument. A la fin, nous avons ajouté une courte Notice historique.

I. — Réseaux et séries linéaires de cercles.

1. *Interprétation des formules.* — Les

$$x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

étant les coordonnées d'un point de l'espace par rap- à un tétraèdre de référence $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$, la (3) est l'équation d'une quadrique elliptique Q dont ce tétraèdre est autopolaire, la (1) est l'équation du plan de coordonnées u_i, et les formules (2) définissent une correspondance univoque entre les points de Q et les points du plan π dans lequel nous considérons le système de coordonnées x, y. Dans cette correspondance, aux sections de Q avec les plans

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

correspondent les cercles de π dont les coordonnées sont u_1, u_2, u_3, u_4.

Si l'équation cartésienne du cercle est

$$a(x^2+y^2) + 2gx + 2fy + c = 0,$$

nous aurons

$$g = u_1, \qquad f = u_2, \qquad a = u_3 + u_4, \qquad c = u_4 - u_3,$$
$$u_1 = g, \qquad u_2 = f, \qquad u_3 = \frac{1}{2}(a - c), \qquad u_4 = \frac{1}{2}(a + c).$$

Les coordonnées du centre et le rayon sont respectivement

$$x_0 = -\frac{g}{a} = -\frac{u_1}{u_3+u_4}, \qquad y_0 = -\frac{f}{a} = -\frac{u_2}{u_3+u_4},$$
$$r = \frac{1}{a}\sqrt{g^2+f^2-ac} = \frac{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2}}{u_3+u_4}.$$

Les cercles de rayon nul (cercles qui se réduisent à deux droites isotropes) ont les coordonnées qui vérifient l'équation

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2 = 0;$$

ils correspondent aux plans tangents à la quadrique Q.

Les cercles de rayon infini (droites de π) ont les coordonnées qui vérifient l'équation

$$u_3 + u_4 = 0;$$

ils correspondent aux plans qui passent par le point $P = (0, 0, 1, 1)$ de la quadrique.

Il résulte de ce qui précède que la correspondance définie par les (2) est une correspondance de Chasles entre les points de Q et les points de π; on obtient le cercle correspondant à un plan en projetant son inter section avec la quadrique Q du point P sur le plan π. Le point P est un ombilic de Q et le plan α tangent en P est parallèle à π, son équation est

$$x_4 - x_3 = 0.$$

Il est bon d'observer que pour tous les cercles de π, hors ceux de rayon infini, on peut supposer $u_3 + u_4 = 1$, car nous pouvons diviser les coordonnées homogènes u_i par une même quantité. Alors les coordonnées du centre et le rayon du cercle de coordonnées

$$u_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

deviennent

$$x_0 = - u_1, \qquad y_0 = - u_2, \qquad r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2}.$$

Pour tous les points de la quadrique Q, hors le point P, on a

$$x_4 - x_3 = 1;$$

donc, pour trouver le point (x, y) correspondant à un point (x_1, x_2, x_3, x_4), on doit diviser les x_i par $x_4 - x_3$.

2. *a. Cercles qui se coupent orthogonalement.* — Les deux cercles

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0,$$
$$a'(x^2 + y^2) + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

se coupent orthogonalement si l'on a

$$2(gg' + ff') = ac' + a'c.$$

Pour les coordonnées u_i, u'_i des deux cercles, on trouve la condition

$$u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3 - u_4 u'_4 = 0,$$

donc :

Les plans qui correspondent à deux cercles orthogonaux sont réciproques par rapport à la quadrique Q *et réciproquement.*

b. Construction du centre du cercle γ *correspondant à un plan* Γ. — Soit c le pôle de Γ par rapport à Q; le point G où la droite PC perce le plan π est le centre de γ. En effet, aux plans qui passent par PC correspondent des droites orthogonales à γ, ces droites sont des diamètres de γ et, par conséquent, leur point commun G est le centre du cercle.

c. Cercles conjugués. — On appelle *cercles conjugués* ceux qui diffèrent seulement par le signe du carré du rayon; deux points diamétralement opposés de l'un d'eux sont conjugués par rapport à l'autre. Si les deux cercles u_i, u'_i sont conjugués, nous aurons (n° 1)

$$u_1 = u'_1, \qquad u_2 = u'_2,$$
$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = -(u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3 + u'^2_4),$$

d'où découlent finalement les formules suivantes :

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = u'_1 : u'_2 : u'_4 - u'^2_1 - u'^2_2 : u'_3 + u'^2_1 + u'^2_2,$$
$$u'_1 : u'_2 : u'_3 : u'_4 = u_1 : u_2 : u_4 - u_1^2 - u_2^2 : u_3 + u_1^2 + u_2^2,$$

qui définissent une correspondance birationnelle quadratique involutive T entre les plans de l'espace. Cette correspondance, qui nous sera utile dans la suite, est l'image de la correspondance entre les cercles de π et leurs conjugués.

Si le cercle u_i est réel, le cercle u'_i sera imaginaire, et réciproquement, c'est-à-dire si le plan u_i coupe la quadrique Q, le plan u'_i ne la coupera pas, et réciproquement.

d. Cercles qui se coupent diamétralement. — Si un cercle coupe diamétralement un cercle γ, il coupera orthogonalement le cercle γ_1 conjugué de γ (n° 2, *c*).

e. *Cercles tangents.* — Si deux cercles γ et δ se touchent en un point M, les plans correspondants se coupent suivant une droite qui touche la quadrique Q au point qui correspond à M.

3. *a*. Une équation

$$\sum_1^4 a_i u_i = 0$$

définit un réseau linéaire de cercles qui est représenté dans l'espace par la gerbe des plans passant par le point A dont les coordonnées homogènes sont les a_i. Cette gerbe est complètement déterminée par trois de ses plans, donc un réseau linéaire est déterminé par trois de ses cercles.

Le plan polaire de A par rapport à Q étant réciproque de tous les plans de la gerbe, représente un cercle γ qui coupe orthogonalement tous les cercles du réseau (n° 2, *a*). Le cercle γ_1, conjugué de γ, sera coupé diamétralement par tous les cercles du réseau (n° 2, *c*). Donc :

Dans tout réseau linéaire de cercles, il existe deux cercles γ, γ_1 conjugués entre eux, dont l'un est coupé orthogonalement et l'autre diamétralement par tous les cercles du réseau.

De ces deux cercles γ, γ_1, un est réel et l'autre imaginaire.

b. Dans un réseau linéaire de cercles, il y en a ∞^1 qui se réduisent à des droites; ils correspondent aux plans de la gerbe qui passent par P et qui forment un faisceau. On trouve ainsi le faisceau des droites qui passent par le centre du cercle orthogonal γ du réseau (n° 2, b).

De même, il y a dans un réseau linéaire ∞^1 cercles de rayon nul; ils correspondent aux plans qui passent par A et touchent la quadrique Q. Par conséquent, ce sont les couples de droites isotropes dont le point réel de rencontre se trouve sur le cercle orthogonal γ du réseau.

c. Cas spéciaux. — Si le point A est sur Q, le réseau se compose de tous les cercles qui passent par le point A′ correspondant de A; le cercle orthogonal se réduit au couple de droites isotropes passant par A′. En particulier, si A coïncide avec P, le réseau est composé de toutes les droites de π.

Si le point A se trouve sur le plan α tangent en P à la quadrique Q, le réseau se compose de cercles dont les centres sont sur une droite a. En effet, le plan α, polaire de P, passe par A, le plan polaire de A passera par P et, par conséquent, le cercle orthogonal du réseau est la droite a d'intersection de π avec ce plan; cette droite, devant couper orthogonalement tous les cercles du réseau, devra contenir les centres de ces cercles.

d. Exemples. — 1° Les cercles qui coupent orthogonalement un cercle fixe; 2° les cercles qui coupent diamétralement un cercle fixe; 3° un autre exemple, très intéressant, est donné par le beau théorème de Faure :

Les cercles circonscrits aux triangles autopolaires par rapport à une même conique forment un réseau linéaire.

Nous pouvons considérer ce théorème comme une conséquence immédiate du théorème de Frégier dans l'espace ([1]). Si nous projetons du point P les triangles autopolaires par rapport à la conique de π, nous aurons des trièdres dont les arêtes coupent la quadrique Q en trois points, qui déterminent un plan Γ représentant le cercle circonscrit au triangle correspondant. Le théorème de Frégier nous enseigne que tous les plans Γ passent par un même point A, donc les cercles circonscrits aux triangles autopolaires par rapport à la conique appartiennent à un réseau linéaire.

4. a. Deux équations

$$\sum_1^4 a_i u_i = 0, \qquad \sum_1^4 b_i u_i = 0$$

définissent une série linéaire (ou faisceau) de cercles, qui est représentée dans l'espace par le faisceau des plans communs aux gerbes de plans

$$\sum_1^4 a_i u_i = 0$$

et

$$\sum_1^4 b_i u_i = 0.$$

Soient l l'axe de ce faisceau de plans, l' sa réciproque par rapport à Q; en projetant l' du point P sur le plan π, on a une droite qui contient les centres de tous les cercles de la série (n° 2, *b*). Les projections des deux points communs à l et à Q sont communs à tous les cercles de la série.

([1]) *Theorèmes nouveaux sur les lignes et les surfaces du second ordre* (*Annales de Gergonne*, vol. VI, p. 237; et vol. VII, p. 97).

Donc :

Une série linéaire de cercles est formée d'une infinité de cercles qui ont deux points réels ou imaginaires communs et dont les centres se trouvent, par conséquent, sur une droite.

b. Dans une série linéaire de cercles, il y en a un qui se réduit à une droite, c'est le cercle de rayon infini qui correspond au plan du faisceau (l) passant par P. Cette droite s'appelle l'*axe radical* de la série, elle contient les deux points communs aux cercles de la série.

De même, il y a dans une série linéaire deux cercles de rayon nul, qui correspondent aux plans tangents à Q menés par l. On a ainsi les *points limites* de la série (Poncelet) qui sont réels ou imaginaires, selon que les points communs à tous les cercles de la série sont imaginaires ou réels. Ces points limites se trouvent sur la droite des centres de la série.

c. *Cas spéciaux*. — Si l'axe l du faisceau de plans touche la quadrique Q, la série linéaire est formée de tous les cercles qui se touchent au même point, qui correspond au point de contact de l avec Q. L'axe radical est la tangente commune aux cercles et les points limites coïncident avec le point de contact.

Si l passe par P, on a un faisceau de droites.

Si l est situé sur le plan α tangent en P à la quadrique, on aura une série linéaire formée de tous les cercles qui ont un même centre. Dans ce cas, l'axe radical est à l'infini, et la droite des centres est indéterminée.

d. *Exemples*. — 1° Les cercles qui coupent orthogonalement deux cercles fixes γ, γ' forment une série linéaire, qui est représentée par le faisceau des plans réciproques par rapport à Q, de ceux qui passent par l'intersection des plans Γ, Γ' correspondant à γ, γ'. Cette série linéaire et celle déterminée par γ, γ' peuvent s'appeler *séries réciproques* de cercles. L'axe radical de l'une est la ligne des centres de l'autre; les points limites de l'une sont les points où se coupent tous les cercles de l'autre.

2° On voit aisément que les cercles conjugués de deux cercles γ, γ', ont pour corde commune la droite symétrique de l'axe radical de γ, γ' par rapport au milieu de la distance des centres. Cette droite s'appelle *axe antiradical* de γ et γ'. On déduit que les cercles qui coupent diamétralement deux cercles fixes γ, γ', forment une série linéaire dont la centrale est l'axe antiradical de γ, γ' et dont l'axe radical est la centrale de $\gamma\gamma'$ (n° 2, *b*). Étant donnés trois cercles γ, γ', γ'', les trois séries linéaires que l'on a en considérant les trois couples $\gamma\gamma'$, $\gamma'\gamma''$, $\gamma''\gamma$, ont un cercle commun dont le centre est le point où se coupent les trois axes antiradicaux.

Donc :

Étant donnés trois cercles quelconques, il existe un cercle qui les coupe diamétralement.

3° Étant données deux coniques λ, λ', les cercles qui sont circonscrits à un triangle autopolaire par rapport à λ et à un triangle autopolaire par rapport à λ' forment une série linéaire (n° 3, *d*).

5. *Correspondance entre la géométrie de la droite de l'espace, et la géométrie des séries linéaires de cercles du plan.* — On peut dire qu'une série linéaire de cercles correspond à la droite commune l de tous les plans correspondant aux cercles de la série; par conséquent à toute droite l de l'espace correspond une série linéaire de cercles, et réciproquement; à tout théorème

sur l'espace réglé correspond un théorème sur les séries linéaires de cercles. Nous donnons des exemples. A deux droites qui se coupent correspondent sur le plan π deux séries linéaires qui ont un cercle commun; à deux droites réciproques par rapport à Q_1 correspondent deux séries réciproques. Étant données deux séries linéaires qui n'ont aucun cercle commun et un cercle γ, on peut construire une série linéaire qui contient γ et qui a un cercle commun avec chacune des deux séries, etc.

NOTES ET EXERCICES. — 1° *Comment faut-il interpréter les formules* (2) *pour avoir la projection stéréographique? Dans quel cas la quadrique* Q *est-elle un paraboloïde de révolution?*

2° *On peut déduire, par des considérations dans l'espace, tous les théorèmes sur le cercle dans le plan. Comme exercice, on pourrait démontrer les beaux théorèmes de Miquel* (*Journal de Liouville,* vol. 3, 9, 10).

3° *A toute configuration harmonique dans l'espace* (voir *les Mémoires de Stéphanos, Reye, Veronese, etc.*) *correspond une configuration harmonique de cercles; étude de cette configuration.*

4° *Étude de deux quadruples de cercles correspondant à deux tétraèdres homologiques, ou bien à deux tétraèdres de Möbius.*

5° *Cercles qui séparent harmoniquement un ou deux couples de points. Construction du cercle qui coupe harmoniquement trois couples de points.*

6° *Cercles pour lesquels un point et une droite sont réciproques. Etant donnés deux points* A, B *et deux droites* a, b, *dans quel cas pourra-t-on construire un cercle pour lequel les points* A, B *sont les pôles des droites* a, b?

7° *Étudier la figure correspondant à un pentagone ou à un hexagone autopolaire par rapport à* Q (voir *Serret : Géométrie de direction*).

8° Problèmes divers. — *Construire un cercle qui coupe orthogonalement deux cercles* γ, γ' *et diamétralement un troisième cercle* γ''. *Construire un cercle qui passe par deux points et qui coupe diamétralement ou orthogonalement un cercle donné* γ, *etc.*

9° *A toute droite* l *de l'espace, on peut faire correspondre la droite* l' *des centres de la série linéaire* L' *qui est l'image du faisceau de plans* (l); *réciproquement, à toute droite* l' *du plan* π *correspondent* ∞^2 *droites de l'espace ; ces droites passent par un point* L *du plan* α *tangent en* P *à la quadrique* Q. *La correspondance entre les droites* l' *et les points* L *est une homographie.*

10° *A tout point* O *de* π *correspond une droite* o *de* α *qui est l'axe du faisceau des plans correspondant aux cercles de centre* O; *la correspondance entre les points* O *et les droites* o *est une homographie. Relation entre cette homographie et celle de l'exemple précédent.*

11° *Étant données quatre séries linéaires de cercles, on peut, en général, construire deux autres séries qui ont un cercle commun avec toutes les séries données.*

II. — Réseaux et séries quadratiques de cercles.

6. Une équation homogène et du second degré

$$\sum_{1}^{4} a_{ij} u_i u_j = 0$$

définit dans l'espace une quadrique-enveloppe M' et dans le plan π un réseau quadratique M de cercles, c'est-à-dire un réseau qui a deux cercles communs avec une série linéaire quelconque de cercles. On peut donc rapprocher les propriétés de ces réseaux de celles des quadriques.

Un réseau quadratique est complètement déterminé par neuf de ses cercles. La construction peut se déduire de celle que l'on connaît pour les quadriques.

7. Si la quadrique M′ est elliptique le réseau ne contient pas des séries linéaires réelles de cercles ; au contraire, si M′ est hyperbolique, le réseau contient deux systèmes ∞^1 de séries linéaires de cercles ; les séries du même système n'ont aucun cercle commun, tandis que les séries de systèmes différents ont un cercle commun. La discussion dépend des coefficients a_{ij} et coïncide avec la discussion des quadriques.

On peut appeler le réseau M *elliptique* ou *hyperbolique,* selon que la quadrique M′ est elliptique ou hyperbolique. Étant données trois droites de l'espace, on peut toujours construire l'hyperboloïde qui les contient ; de même, étant données trois séries linéaires de cercles, qui deux à deux n'ont aucun cercle commun, on peut construire le réseau hyperbolique qui les contient (n° 5).

Après cela l'extension des théorèmes de Hesse sur les groupes de droites d'un hyperboloïde est immédiate.

8. Il y a ∞^2 faisceaux de cercles qui ont un seul cercle commun avec un réseau quadratique M ; ils correspondent à la congruence des tangentes à la quadrique M′. Par tout cercle du plan passent ∞^1 de ces faisceaux qui correspondent aux tangentes de M′ situées dans le plan dont le cercle donné est l'image.

Par rapport à un réseau quadratique de cercles, on peut établir une théorie analogue à celle de la polarité par rapport à une quadrique. Pour cela, on peut parler du réseau linéaire polaire d'un cercle par rapport à un réseau quadratique M; des réseaux linéaires réciproques par rapport à M; des quadruples de cercles autopolaires par rapport à M, etc.

9. Dans un réseau quadratique M, il y en a ∞^1 dont le rayon est nul; ils correspondent aux plans de la développable commune aux deux quadriques M' et Q; cette développable touche la quadrique Q suivant une courbe gauche du quatrième ordre L'_4 qui est l'intersection de Q et de la polaire réciproque de la quadrique-enveloppe M' par rapport à Q. En projetant cette courbe, qui en général ne passe pas par P, on aura le lieu des points du réseau quadratique, et c'est une courbe du quatrième ordre L_4 qui passe deux fois par les points cycliques du plan π. En effet, tout cercle de π coupe L_4 en 4 points au lieu de 8.

Les cercles de rayon infini du réseau correspondent aux plans tangents à la quadrique M' menés par P; donc ils enveloppent une conique L_2.

Si le réseau est hyperbolique, on peut dire que les points-limites de ses ∞^1 séries linéaires sont sur une *quartique bicirculaire,* et les axes radicaux de ces mêmes séries enveloppent une conique.

10. *Cas spéciaux.* — Un réseau quadratique M peut se spécialiser, ou quand la quadrique M' se spécialise elle-même, ou lorsque M' se trouve dans une position particulière par rapport à la quadrique Q.

a. Si la quadrique M' se réduit à une conique enveloppe de plans, on aura un réseau *singulier* qui se compose de ∞^1 faisceaux de cercles dont les axes radicaux touchent une conique, et qui ont un cercle commun qui correspond au plan de la conique M'. Ce cercle peut s'appeler *cercle double du réseau,* car toute série linéaire qui le contient coupe le réseau quadratique en un seul cercle.

La courbe L_4 dans ce cas ne présente aucune spécialité. Il y a pourtant une exception : si la conique M' se trouve sur la quadrique Q, le réseau M se compose de tous les cercles qui touchent un même cercle γ, la courbe L_4 se réduit à ce cercle compté deux fois, et la courbe L_2 est le même cercle considéré comme enveloppe de ses tangentes.

Si la quadrique M' se réduit en un couple de points, le réseau quadratique se réduit à deux réseaux linéaires qui peuvent aussi coïncider; la courbe L_4 se réduit aux deux cercles orthogonaux des deux réseaux linéaires et la conique L_2 se réduit à un couple de points.

b. Si les quadriques M', Q ne se trouvent pas en position générale, on peut distinguer plusieurs cas différents (*voir* l'article de M. Andoyer dans les *Nouvelles Annales,* avril 1896). On pourrait trouver ce qui arrive pour le réseau M dans chacun de ces cas. Nous donnerons quelques exemples.

1° Si la quadrique M' touche le plan α, la L'_4 passera par P et la courbe L_4 devient une cubique circulaire. Dans ce cas, la conique L_2 est une parabole, car le plan α est parallèle à π.

2° Si M' et Q se touchent en deux points A, B, la courbe L_4 se compose de la droite qui unit les projections de A, B et d'une cubique circulaire.

3° Si M' et Q se touchent en un seul point A la courbe L_4 possède trois points doubles : les points cycliques et la projection de A.

4° Si M' et Q se touchent le long d'une conique γ la courbe L_4 se réduit à un cercle compté deux fois.

11. *Exemples.* — 1° Les cercles conjugués des cercles d'un réseau linéaire A forment un réseau quadratique, qui correspond à la quadrique M′ que l'on déduit du point-enveloppe A avec la transformation quadratique T (n° 2, *c*).

2° Les cercles qui ont un même rayon r forment un réseau quadratique elliptique dont l'équation est

$$(u_3 + u_4) r^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2.$$

3° Les cercles tangents à un cercle fixe γ forment un réseau quadratique singulier (n° 10, *a*); le cercle double est γ.

4° Les cercles qui déterminent sur un cercle fixe des cordes de longueur constante.

5° Les cercles qui coupent un cercle fixe γ sous un angle constant $\alpha (\alpha \neq 90°)$ forment un réseau hyperbolique dont l'équation est (¹)

$$\begin{aligned}(u_1 - u'_1)^2 + (u_2 - u'_2)^2 \\ = u_1^2 + u_2^2 + u_3 - u_4 + u'^2_1 + u'^2_2 + u'_3 - u'_4 \\ - 2(u_1^2 + u_2^2 + u_3 - u_4)(u'^2_1 + u'^2_2 + u'_3 - u'_4)\cos\alpha,\end{aligned}$$

où les u'_i sont les coordonnées de γ et α l'angle donné.

En simplifiant, on trouve

$$(4) \quad 2\cos\alpha = \frac{2u_1u'_1 + 2u_2u'_2 + u_3 - u_4 + u'_3 - u'_4}{(u_1^2 + u_2^2 + u_3 - u_4)(u'^2_1 + u'^2_2 + u_3 - u_4}.$$

6° Les cercles qui sont coupés diamétralement par un cercle fixe γ, etc.

12. Aux points K′ d'une quadrique-enveloppe M′ correspondent des réseaux linéaires de cercles; les cercles orthogonaux de ces réseaux forment un réseau quadra-

---

(¹) On suppose $u_3 + u_4 = 1$ (n° 1).

tique M_1 de cercles qui correspond à la quadrique M'_1 polaire réciproque de M' par rapport à Q. Les réseaux M, M_1 peuvent s'appeler *réciproques ;* s'ils contiennent des séries linéaires réelles, les séries de M sont réciproques des séries correspondantes de M_1.

Les cercles qui sont coupés diamétralement par un cercle fixe γ forment un réseau qnadratique réciproque du réseau des cercles conjugués des cercles d'un réseau linéaire (exemple : 1° et 6° du numéro précédent).

13. *Séries quadratiques de cercles.* — Les cercles communs à un réseau quadratique M et à un réseau linéaire A forment une série quadratique de cercles, qui est représentée dans l'espace par le cône K tangent à la quadrique M', conduit par le point A' correspondant au réseau A.

Les cercles d'une série quadratique enveloppent une courbe qui est la projection de la courbe d'intersection du cône K et de la quadratique Q ; les centres sont sur une conique qui est la projection de la courbe polaire réciproque du cône considéré comme enveloppe, par rapport à Q. Tous les cercles de la série coupent orthogonalement un même cercle qui correspond au plan polaire de A' par rapport à Q.

Donc : *une série quadratique de cercles se compose de ∞^1 cercles qui ont les centres sur une section conique et qui coupent orthogonalement un cercle fixe. Ils enveloppent une quartique bicirculaire.*

Dans une série quadratique de cercles, il y en a deux qui se réduisent à des droites ; ils correspondent aux plans tangents au cône K menés par P.

De même, il y a dans la série quatre cercles de rayon nul ; ils correspondent aux quatre plans tangents communs aux deux cônes dont le sommet est A' et dont l'un touche M' et l'autre Q.

On peut noter divers cas particuliers, selon la position du cône K par rapport à Q. Lorsque le point A, sommet du cône K, se trouve sur la quadrique Q et une génératrice rectiligne du cône passe par P, la courbe d'intersection de K avec Q passe par P, et la conique polaire réciproque du cône-enveloppe K par rapport à Q touche le plan α. Par conséquent, l'enveloppe des cercles de la série est une cubique circulaire et la conique des centres est une parabole. On déduit que : *Les cercles qui passent par un même point et qui ont leurs centres sur une parabole enveloppent une cubique circulaire.*

Un autre cas particulier intéressant est celui où le point A se trouve sur le plan α; alors la ligne des centres se réduit à une droite.

14. *Faisceau de réseaux quadratiques.* — Deux réseaux quadratiques M et M_1 ont en commun ∞^1 cercles qui forment une série biquadratique de cercles qui correspond à la développable commune aux deux quadriques M' et M'_1. Ils enveloppent une courbe circulaire du huitième ordre et leurs centres sont sur une quartique.

A un faisceau tangentiel de quadriques M' correspond un faisceau de réseaux quadratiques qui ont une même série biquadratique commune.

Dans un faisceau tangentiel de quadriques il y en a quatre qui se réduisent à des coniques-enveloppes, donc dans un faisceau de réseaux quadratiques il y en a quatre singuliers. Les quatre cercles doubles correspondent aux faces d'un tétraèdre autopolaire par rapport à toutes les quadriques du faisceau.

En considérant le faisceau tangentiel des deux quadriques Q et M′, on aura le théorème suivant :

Une quartique bicirculaire peut être considérée de quatre manières différentes comme l'ensemble des points d'un réseau quadratique singulier.

NOTES ET EXERCICES. — 1° *Étude de la transformation quadratique* T (n° 2, c). *Résoudre les questions suivantes en appliquant les propriétés de cette transformation : a. Trouver la propriété caractéristique des réseaux quadratiques pour lesquels il existe un cercle qui coupe diamétralement les cercles du réseau; b. Étant donné un cercle* γ, *on peut construire le réseau linéaire* L *des cercles qui sont coupés orthogonalement par* γ, *et le réseau quadratique* M *des cercles qui sont coupés diamétralement par* γ; *trouver les relations entre ces deux réseaux.*

2° *Démontrer que les deux systèmes de séries linéaires qui sont comprises dans le réseau quadratique de l'exemple* 5° *du n°* 11 *correspondent à des droites tangentes à la quadrique* Q.

3° *Étudier le réseau quadratique des cercles pour lesquels deux droites données sont réciproques.*

4° *Soient* α, β, γ, δ *quatre cercles;* α', β', γ', δ' *les cercles orthogonaux des ternes* $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$. *Démontrer que les quatre faisceaux de cercles* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ *appartiennent, en général, à un réseau quadratique.*

5° *Etudier la série des cercles qui sont coupés diamétralement par deux cercles fixes.*

6° *Les cercles qui passent par un point et qui touchent un cercle* γ, *touchent un autre cercle* γ'.

7° *Les séries linéaires qui ont un cercle commun et qui sont tangentes à un réseau quadratique forment un réseau quadratique singulier* (n° 8).

III. — Application au problème d'Apollonius.

15. *Système de deux cercles.* — Soient donnés deux cercles u'_i, u''_i; il y a ∞^2 cercles qui les coupent sous des angles égaux et qui s'appellent les *cercles isogonaux* du système. En appliquant la formule (4) du n° **11**, on trouve pour les cercles isogonaux u_i l'équation

$$\frac{2u_1u'_1 + 2u_2u'_2 + u_3 - u_4 + u'_3 - u'_4}{(u_1^2 + u_2^2 + u_3 - u_4)(u'^2_1 + u'^2_2 + u'_3 - u'_4)}$$
$$= \pm \frac{2u_1u''_1 + 2u_2u''_2 + u_3 - u_4 + u''_3 - u''_4}{(u_1^2 + u_2^2 + u_3 - u_4)(u''^2_1 + u''^2_2 + u''_3 - u''_4)}.$$

Par conséquent, ils forment deux réseaux linéaires L′, L″. Les plans correspondants dans l'espace passent par deux points dont les projections sur π sont les centres l', l'' des cercles orthogonaux λ', λ'' des deux réseaux. Chaque droite qui passe par l' ou l'' coupe les deux cercles u'_i, u''_i en quatre points qui déterminent des séries linéaires de cercles appartenant aux réseaux. On déduit facilement que les points l', l'' sont les centres de similitude des cercles u', u'' et que les cercles λ', λ'' sont les cercles radicaux intérieur et extérieur du système u', u''. Considérons les réseaux quadratiques M′, M″ des cercles tangents à u', u''. Les quadriques correspondantes se réduisent à des coniques de Q et, par conséquent, leur développable commune se réduit à deux cônes. Puisque les cercles tangents à u' et u'' sont isogonaux à ces cercles, ils appartiennent aussi aux deux réseaux L′ et L″ et, par conséquent, les sommets des deux cônes sont les centres des deux gerbes de plans correspondant aux réseaux L′, L″. *Donc les cercles tangents à deux cercles u', u'' forment deux séries quadratiques de cercles dont les cercles orthogonaux sont les cercles radicaux du système u', u''.*

16. *Système de huit cercles associés.* — Trois équations des degrés m, n, p déterminent un système de m, n, p cercles. Le cas où $m = n = p = 2$ est particulièrement intéressant. On a alors un groupe de huit cercles communs à trois réseaux quadratiques et que l'on peut appeler *système de huit cercles associés*. Les propriétés de ce système peuvent se déduire des propriétés de huit plans tangents communs à trois quadriques; par conséquent, sept cercles du système déterminent le huitième, et l'on peut le construire en traduisant sur le plan les constructions que l'on connaît pour l'espace.

Exemple. — Des théorèmes de *Hesse* on déduit que deux quadruples de cercles autopolaires par rapport à un réseau quadratique forment un système de huit cercles associés; et réciproquement, si deux quadruples de cercles forment un système associé, elles sont autopolaires par rapport à un même réseau quadratique.

17. Si les trois quadriques se réduisent à trois coniques u', u'', u''' considérées comme enveloppes de plans, les huit plans tangents communs forment un système remarquable auquel correspond sur le plan π le système des huit cercles tangents aux trois cercles images des coniques u', u'', u'''.

Donc, on pourra obtenir la solution du problème d'Apollonius par des considérations dans l'espace.

18. Soient u'_i, u''_i, u'''_i les cercles correspondant aux coniques u', u'', u'''; on pourra former les trois couples $u'_i u''_i$, $u''_i u'''_i$, $u'''_i u'_i$. Chacun de ces couples donne lieu à deux centres de similitude; on a ainsi six points dont nous voulons étudier la position.

Les arêtes du trièdre des plans des coniques u', u'', u'''

coupent la quadrique aux couples de points AA', BB', CC'; les points AA' sont communs aux coniques u', u'', les points BB' aux coniques u'', u''', et les points CC' aux coniques u''', u'. Les sommets des six cônes sont

$$V_1 \equiv AB\,.\,A'B', \quad V_3 \equiv AC\,.\,A'C', \quad V_5 \equiv BC\,.\,B'C',$$
$$V_2 \equiv AB'\,.\,A'B, \quad V_4 \equiv AC'\,.\,A'C, \quad V_6 \equiv BC'\,.\,B'C.$$

On voit immédiatement que ces points sont trois par trois sur quatre droites intersection des couples de plans :

$$\begin{array}{cccc} A\,B\,C & A\,B'C' & A'B\,C & A\,B\,C' \\ A'B'C' & A'B\,C' & A\,B'C' & A'B'C \end{array}$$

De là on déduit que *les six centres de similitude d'un système de trois cercles sont trois par trois sur quatre droites*. Ces droites s'appellent les *axes de similitude* du système.

19. Considérons un plan qui passe par les trois points V_1, V_3, V_5 en ligne droite; le cercle correspondant doit couper isogonalement u'_i, u''_i et u'_i, u_i et par conséquent coupe isogonalement les trois cercles donnés. On a ainsi quatre faisceaux de plans auxquels correspondent quatre séries linéaires de cercles isogonaux à u'_i, u''_i, u'''_i.

Donc : *les cercles isogonaux à trois cercles donnés forment quatre séries linéaires dont les axes radicaux sont les quatre axes de similitude.*

20. *Solution du problème d'Apollonius.* — Les huit plans tangents communs aux coniques u', u'', u''' sont les plans tangents communs aux six cônes dont les sommets sont les points $V_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Donc ces huit plans passent deux par deux par les quatre droites que nous venons de trouver (n° 18).

Par conséquent les huit cercles tangents aux cercles donnés appartiennent deux à deux aux quatre faisceaux des cercles isogonaux (n° 19).

De là on déduit une construction du problème d'Apollonius différente de celle de Gergonne.

Nous n'insistons pas sur cette construction qui se trouve exposée dans un intéressant Mémoire de M. Fouché inséré dans les *Nouvelles Annales* [1]. Dans le même Volume de ce Journal, on trouvera un Mémoire de M. Lemoine qui contient l'analyse comparée des solutions de Viète, Gergonne, Fouché et Mannheim, en appliquant les principes de la Géométrographie.

Notes et exercices. — 1° *Il y a huit cercles isogonaux à quatre cercles donnés* α, β, γ, δ. *Si* α', β', γ', δ' *sont les cercles orthogonaux des systèmes* $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$, *ces cercles et les huit cercles isogonaux forment une configuration harmonique de cercles* (*exemple* 3° *du paragraphe I*).

2° *A un tétraèdre autopolaire par rapport à la quadrique* Q *correspond une quadruple de cercles orthogonaux deux à deux. Ces cercles peuvent se considérer comme les cercles conjugués des quatre triangles que l'on peut former avec un quadrilatère orthogonal. Propriétés de ce système.*

3° *Si l'on a deux quadrilatères orthogonaux les deux quadruples de cercles correspondantes forment un groupe de huit cercles associés.*

4° *Les cercles doubles des quatre réseaux singuliers d'un faisceau de réseaux quadratiques sont orthogonaux deux à deux.*

---

(1) *Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné* (*Nouvelles Annales*, 1892).

5° *Construire un cercle isogonal à trois cercles donnés et qui passe par un point.*

6° *Étude de la série des cercles qui coupent deux cercles fixes sous des angles constants.*

7° *Déduire la construction du problème de Steiner : construire les cercles qui coupent trois cercles donnés sous des angles donnés.*

Notice historique.

Les recherches de *Poncelet* (*Traité des propriétés projectives des figures*) et de *Steiner* [*Einige geometrische Beobachtungen* (*Journal de Crelle*, vol. 1)] établissent les propriétés principales du système de deux et de trois cercles. Dans le Mémoire de Steiner se trouve, en outre, la solution de plusieurs problèmes, parmi lesquels le problème d'*Apollonius* et celui de *Malfatti*. Pour le problème d'Apollonius, on connaissait déjà la solution de *Gergonne*.

La représentation d'une quadrique sur le plan a été découverte par *Chasles*. Elle permet de déduire, des propriétés de la quadrique, les propriétés d'un système de coniques du plan qui passent par deux points, et *vice versa*.

Lorsque ces deux points sont les points cycliques, on aura les cercles du plan. Un cas particulier est la représentation stéréographique de la sphère. L'application de cette représentation à l'étude des cercles du plan se trouve dans un intéressant Mémoire de *Thomæ* [*Das ebene Kreissystem und seine Abbildung auf den Raum* (*Zeitschr. für Math.*, vol. XXIX, 1884)]. Dans ce Mémoire se trouve pour la première fois l'étude des réseaux quadratiques de cercles.

Les propriétés des réseaux quadratiques de cercles peuvent servir pour l'étude des cubiques et des quartiques circulaires : Voir le Mémoire de *G. Loria* (*Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du quatrième ordre*) (*Quarterly Journal*, vol. XXII, 1887)].

Parmi les autres Mémoires qui traitent du cercle dans le plan, je noterai le Mémoire de *Fouché* déjà cité, un Mémoire de *Hosfeld* (*Ueber die mit der Lösung einer Steiner'schen Aufgabe zusammenhangende Cfz* [12_6 16_3], *Zeit. für Math.*, vol. XXIX) qui traite de la configuration harmonique de cercles, et le Mémoire de *Ciamberlini* (*Sulla rappresentazione dei punti di un piano con i punti d'un paraboloide ellittico*) où se trouve exposée une particulière représentation des cercles du plan.

On peut aussi ajouter les Mémoires de *Müller* et de *Mehmke* qui ont appliqué les principes de Grassman (voir : *Monatshefte für Math.*, vol. III, et *Zeitsch. für Math.*, vol. XXV).