G. FONTENÉ

Sur des polyèdres mobiles comparables aux polygones de Poncelet

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 67-74
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__67_0>

[$L^2$17d]

SUR DES POLYÈDRES MOBILES COMPARABLES AUX POLYGONES DE PONCELET;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

Théorème I. — *Étant données deux quadriques* U *et* V, *pour que les huit conditions par lesquelles un tétraèdre* $\mathcal{ABCD}$ *est circonscrit à l'une et inscrit à l'autre se réduisent à sept, ou encore pour que les tétraèdres circonscrits à l'une et inscrits à l'autre dépendent de cinq paramètres au lieu de quatre, il faut et il suffit que ces deux quadriques aient quatre génératrices communes.*

1° La condition est suffisante. Soient LM, MN, NP, PL les quatre génératrices communes; les deux quadriques admettent en nombre doublement infini des tétraèdres conjugués communs ABCD, les arêtes AC et BD étant dirigées suivant LN et MP; un plan tangent à la quadrique U rencontre LN et MP en deux points que nous prendrons comme points A et B. Les équations des deux quadriques U et V rapportées au tétraèdre ABCD sont

$$(\mathrm{U}) \qquad X^2 - Y^2 - Z^2 + T^2 = 0,$$

$$(\mathrm{V}) \qquad X^2 - k^2 Y^2 - Z^2 + k^2 T^2 = 0:$$

le plan tangent à U est $Z = T$. Prenons sur la quadrique V un point $\mathcal{D}$ de coordonnées a, b, c, d, ce qui donne

$$k = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}, \qquad k - 1 = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{b^2 - d^2},$$

et considérons le cône de sommet $\mathcal{D}$ circonscrit à U :

$$(k-1)(b^2-d^2)(X^2-Y^2-Z^2+T^2)$$
$$-(aX-bY-cZ+dT)^2=0.$$

Il faut démontrer que, si l'on coupe ce cône et la quadrique V par le plan $Z=T$, tangent à U, les deux coniques u et v obtenues admettent des triangles $\mathcal{ABC}$ circonscrits à u et inscrits à v; s'il en est ainsi, les tétraèdres $\mathcal{ABCD}$ dépendent de cinq paramètres : deux pour le sommet $\mathcal{D}$, deux pour le plan $\mathcal{ABC}$, un pour le triangle $\mathcal{ABC}$. Or on a, en faisant $Z=T$ dans l'équation du cône et dans celle de la quadrique V,

$$(u)\qquad (k-1)(b^2-d^2)(Y^2-X^2)+[aX-bY-(c-d)Z]^2=0,$$
$$(v)\qquad X^2-kY^2+(k-1)Z^2=0,$$

et les invariants du système doivent satisfaire à la relation connue $\theta^2-4\delta\theta'=0$. On trouve d'abord

$$\delta=-(c-d)^2(b^2-d^2)^2(k-1)^2;$$

on a ensuite

$$\theta=(k-1)(b^2-d^2)[(k+1)(c-d)^2-(k-1)^2(b^2-d^2)$$
$$+(k-1)\,(a^2-b^2)],$$

ou, en remplaçant dans le crochet $(k-1)(b^2-d^2)$ par $a^2-b^2-c^2+d^2$,

$$\theta=2(c-d)(b^2-d^2)(k-1)(kc-d);$$

on a enfin

$$\theta'=(k-1)(b^2-d^2)(k^2-1)-a^2k(k-1)$$
$$+b^2(k-1)-k\,(c^2+d^2-2cd),$$

ou, en remplaçant $(k-1)(b^2-d^2)$ par

$$a^2-b^2-c^2+d^2,$$

$$\theta'=-k^2c^2-k^2(b^2-d^2)-(a^2-c^2)-d^2$$
$$+k(a^2-c^2)+k(b^2-d^2)+2kcd=-(kc-d)^2;$$

on a donc bien $\theta^2-4\delta\theta'=0$.

2° La condition est nécessaire. Les deux quadriques U et V étant supposées quelconques, si l'on se donne le sommet $\mathcal{D}$ sur la quadrique V, les plans $\mathcal{ABC}$ sont les plans tangents communs à la quadrique U et à une surface qui est l'enveloppe des plans coupant le cône de sommet $\mathcal{D}$ circonscrit à U, et la quadrique V, suivant deux coniques u et v qui admettent des triangles circonscrits à u et inscrits à v; or, il existe une quadrique U′ inscrite au cône et ayant avec V quatre génératrices communes : cette quadrique est l'enveloppe en question, d'après ce qu'on a vu; dès lors, pour que le plan tangent à la quadrique U puisse être quelconque, il est nécessaire que la quadrique U, qui doit se confondre avec U′, ait avec V quatre génératrices communes.

Quand les deux quadriques U et V sont quelconques, comme les deux quadriques U et U′ sont inscrites à un même cône, elles ont un second cône circonscrit commun, de sorte que les plans $\mathcal{ABC}$, tangents à U, qui correspondent à un même point $\mathcal{D}$ pris sur V, passent par un point déterminé.

Théorème II. — *Pour que deux quadriques* U *et* V *admettent des tétraèdres dont les arêtes leur soient tangentes, il faut que les racines du discriminant de la forme* $\lambda U + V$, *soit*

$$\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta',$$

vérifient la relation

$$\Sigma\varepsilon\sqrt{\lambda}\,.\,\varepsilon'\sqrt{\lambda'} = 0, \tag{1}$$

ce qui a lieu si les invariants vérifient la relation

$$\Phi = \pm 2\sqrt{\Delta\Delta'} \pm 2\sqrt{\Theta\Theta'}, \tag{1'}$$

ou

$$(1'') \qquad \Phi^4 - 8\Phi^2(\Delta\Delta' + \Theta\Theta') + 16(\Delta\Delta' - \Theta\Theta')^2 = 0\,;$$

il existe alors une simple infinité de tétraèdres répondant à la question.

1° Si un tel tétraèdre existe, en le prenant comme tétraèdre de référence, les équations des deux quadriques sont de la forme

$$A^2x^2 + B^2y^2 + \ldots - 2ABxy - \ldots = 0\,;$$

en posant $\frac{A'}{A} = \alpha, \ldots$, on trouve que les rapports des cinq invariants ne dépendent que des trois quantités $\Sigma\alpha$, $\Sigma\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma\delta$, et une élimination facile donne la relation $(1')$. Le discriminant, égalé à zéro, donne

$$(\lambda^2\sqrt{\Delta} \pm \sqrt{\Delta'})^2 - \lambda(\lambda\sqrt{-\Theta} \pm \sqrt{-\Theta'})^2 = 0,$$

ou, en désignant $\sqrt{\lambda}$ par μ,

$$\mu^4\sqrt{\Delta} \pm \mu^3\sqrt{-\Theta} \pm \mu\sqrt{-\Theta'} \pm \sqrt{\Delta'} = 0,$$

ce qui donne la relation (1); on verrait d'ailleurs que (1) donne $(1')$ en comparant cette équation en μ à l'équation aux carrés des racines;

2° Considérons la figure formée par un tétraèdre et deux quadriques inscrites aux arêtes : en partant du tétraèdre, cette figure dépend de paramètres en nombre

$$12 + 3 + 3 = 18\,;$$

si l'on part des deux quadriques, liées par la relation (1), et dépendant de dix-sept paramètres, le tétraèdre doit dépendre d'un paramètre. Il y aurait à chercher la courbe Γ qui est le lieu des sommets des tétraèdres, celle Γ' qui est osculée par les plans des faces, et la surface réglée qui est le lieu des arêtes. Si l'on considère le tétraèdre infiniment voisin du tétraèdre de référence et répondant à la question, en désignant les coordonnées des sommets par $(1+\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''')$, $(\beta, 1+\beta', \beta'', \beta''')$, ..., et en supposant $A' = B' = C' = D' = 1$, on a, avec ε infiniment petit,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha'}{(AB - CD)(C - D)} &= \frac{\alpha''}{(AC - DB)(D - B)} \\
&= \frac{\alpha'''}{(AD - BC)(B - C)} = + A\varepsilon, \\
\frac{\beta''}{(BC - DA)(D - A)} &= \frac{\beta'''}{(BD - AC)(A - C)} \\
&= \frac{\beta}{(BA - CD)(C - D)} = - B\varepsilon,
\end{aligned}$$

. . . . ;

on constate que la courbe Γ ne peut pas être une cubique gauche, comme on pourrait le soupçonner; les tangentes en A, B, C, D percent les plans BCD, . . ., en des points α, β, γ, δ, tels que le plan $\beta\gamma\delta$ par exemple passe en A. On a un fait corrélatif pour la courbe Γ'.

Pour deux sphères, quadriques bitangentes, en appelant d la distance des centres, R et R′ les rayons, on obtient

$$R = R' \qquad \text{ou} \qquad \frac{2d}{\sqrt{3}} = \pm R \pm R';$$

dans le second cas, les tétraèdres sont des pyramides triangulaires régulières, disposées autour de la ligne des centres, et la réalité suppose la relation avec deux signes +; dans le premier cas, les tétraèdres ont leurs arêtes opposées égales deux à deux, et ils dépendent de deux paramètres.

Remarque. — Il y aurait à chercher si les dix conditions par lesquelles un tétraèdre a ses arêtes tangentes à une quadrique U et est inscrit (ou circonscrit) à une quadrique V peuvent se réduire à un nombre moindre.

II.

La figure corrélative d'un octaèdre à diagonales concourantes est un hexaèdre pour lequel les droites d'intersection des plans des faces opposées sont dans un même plan, ou, d'une manière abrégée, un hexaèdre à intersections coplanaires. Comme deux quadriques

$$\Sigma A x^2 = 0, \qquad \Sigma A' x^2 = 0,$$

sont polaires réciproques par rapport à chacune des huit quadriques

$$\Sigma \pm \sqrt{AA'}\, x^2 = 0,$$

des hexaèdres à intersections coplanaires circonscrits à une quadrique U et inscrits à une quadrique V donnent lieu à des octaèdres à diagonales concourantes circonscrits à U et inscrits à V.

Théorème III. — *Si l'on se propose d'obtenir un hexaèdre à intersections coplanaires, ou un octaèdre à diagonales concourantes, circonscrit à une quadrique* U *et inscrit à une quadrique* V, *le problème, qui paraît être doublement indéterminé, n'est possible que si les racines du discriminant de la forme* $\lambda U + V$ *vérifient la relation*

$$(2) \qquad -\lambda + \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma\lambda = 2\lambda,$$

ce qui a lieu si le discriminant admet la racine $\frac{-\Theta}{2\Delta}$, *ou encore si l'on a*

$$(2') \qquad \Theta^4 - 4\Delta\Theta^2.\Phi + 8\Delta^2\Theta.\Theta' - 16\Delta^3.\Delta' = 0;$$

le problème est alors triplement indéterminé. Le plan des intersections est le même pour tous les hexaèdres, c'est le plan ABC de l'une des faces du tétraèdre conjugué commun aux deux quadriques, et le triangle $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{N}$ des intersections est l'un quelconque des triangles conjugués par rapport à la conique U suivant laquelle le plan ABC coupe la quadrique V; le point de concours des diagonales est le même pour tous les octaèdres, c'est le sommet D du tétraèdre conjugué commun, et le trièdre des diagonales est l'un quelconque des trièdres conjugués par rapport au cône de sommet D circonscrit à la quadrique U.

1° Un hexaèdre à diagonales coplanaires circonscrit à une quadrique U dépend de neuf paramètres; si une quadrique V passe par les huit sommets, cela fait sept conditions; mais V n'est pas quelconque par rapport à U. Si D est le pôle du plan $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{N}$ par rapport à U, comme les équations des six plans rapportés au tétraèdre $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{N}$D sont

$$x = \pm at, \qquad y = \pm bt, \qquad z = \pm ct,$$

de sorte que l'on a pour les coordonnées des huit sommets

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{t^2}{1},$$

la quadrique V est conjuguée par rapport au tétraèdre $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{N}$D, D est le pôle du plan $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{N}$ par rapport à V, et la section de V par ce plan est une conique v conjuguée au triangle $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{N}$. Si l'on désigne par δ, θ, θ', δ' les invariants du système des deux coniques u et v obtenues en coupant les quadriques U et V par le plan $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{N}$, on trouve que le discriminant de la forme λU + V doit être, à un facteur près,

$$(\delta\lambda + \theta)(\delta\lambda^3 + \theta\lambda^2 + \theta'\lambda + \delta'),$$

ce qui donne la condition (2).

2° Comme pour le théorème II (pour le théorème I, où l'on a démontré d'abord que la condition est suffisante, on a dû employer un autre mode de raisonnement). Le théorème comprend la sphère de Monge, et peut s'y ramener; les diagonales des octaèdres sont alors trois diamètres conjugués de la quadrique U.

Pour deux sphères, quadriques bitangentes, on doit avoir

$$d^2 = R^2 + R'^2$$

ou

$$d^2 = R^2 + R'^2 \pm 2R\sqrt{R^2 + R'^2}.$$

Remarque. — Si l'on demande un polyèdre d'espèce donnée, dont les arêtes soient tangentes à une quadrique donnée, ce polyèdre dépend de six paramètres; s'il s'agit d'un hexaèdre dont les plans des faces doivent toucher une autre quadrique donnée, ou d'un octaèdre dont les sommets doivent être sur une quadrique donnée, le problème paraît être déterminé. L'est-il réellement?