NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL STAECKEL

Sur quelques propriétés arithmétiques des fonctions analytiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 53-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__53_0>

[D4] [J5]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

PAR M. PAUL STAECKEL,
Professeur à l'Université de Kiel.

Mathematische Annalen, t. XLVI, p. 514-520

Traduit avec l'autorisation de l'auteur par M. L. LAUGEL.

I.

THÉORÈME. — *Soient $x_0, x_1, \ldots, x_\nu, \ldots$ les points d'un ensemble* DÉNOMBRABLE *quelconque* P *de points dans le domaine de la quantité complexe à variabilité illimitée x, tandis que l'on désignera par* Q *un ensemble quelconque* PARTOUT DENSE *de points dans ce plan. Il existe alors toujours une infinité de* FONCTIONS UNIFORMES ANALYTIQUES $f(x)$ *qui, pour tous les arguments $x_0, x_1, \ldots$ de l'ensemble* P, *prennent seulement des valeurs appartenant à l'ensemble* Q.

DÉMONSTRATION. — Construisons les fonctions rationnelles entières

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1,\\
&\varphi_1(x) = x - x_0,\\
&\varphi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\varphi_\nu(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{\nu-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et considérons d'une manière d'abord purement formelle l'expression

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \varphi_\nu(x);$$

les quantités u_ν sont des constantes dont on a encore la faculté de disposer.

On a alors

$$f(x_0) = u_0,$$

et l'on peut donc poser

$$u_0 = y_0,$$

où y_0 est un point quelconque de l'ensemble Q. Il vient ensuite

$$f(x_1) = y_0 + u_1 x_1 (x_1 - x_0).$$

Si l'on fait encore cette convention que $x_0 = 0$, lorsque le point $x = 0$ appartient à l'ensemble P, l'on peut alors poser

$$u_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1(x_1 - x_0)},$$

où y_1 est un point quelconque de l'ensemble Q. On obtient de la même manière

$$f(x_2) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x_2(x_2 - x_0)}{x_1(x_1 - x_0)} + u_2 x_2^3 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

et l'on peut encore déterminer u_2 de telle sorte que l'on ait

$$f(x_2) = y_2,$$

où y_2 est un point quelconque de l'ensemble Q.

Si l'on procède ainsi successivement, après avoir déterminé $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$, on a pour u_ν une équation de la forme

$$y_\nu = a_\nu + u_\nu x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} (x_\nu - x_0)(x_\nu - x_1)\ldots(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

où a_ν désigne une fonction rationnelle connue de x_0, $x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ et de $y_0, y_1, \ldots, y_{\nu-1}$, tandis que y_ν est un point quelconque de l'ensemble Q.

Il résulte de ceci que, pour une pareille détermination des constantes u_ν, l'expression $f(x)$, considérée d'une manière formelle, possède la propriété requise, et il ne reste donc plus qu'à rechercher comment doivent être choisis les points $y_0, y_1, \ldots, y_\nu, \ldots$ encore arbitraires, de l'ensemble Q de façon que $f(x)$ soit une *série de puissances de x toujours convergente.*

Si, dans le terme

$$u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \varphi_\nu(x),$$

on effectue les multiplications en ordonnant ensuite suivant les puissances ascendantes de x, le développement commence avec l'exposant

$$\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$$

et finit avec l'exposant

$$\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\nu = \frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2) - 1.$$

Par conséquent $f(x)$, lorsqu'on effectue les multiplications, se transforme en une série de puissances de x que l'on peut écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{\nu-1} u_\nu c_{\nu,\alpha} x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha};$$

ici $c_{\nu,\alpha}$ désigne le coefficient de x^α dans $\varphi_\nu(x)$.

Par suite, si pour chaque valeur entière positive on parvient à satisfaire aux inégalités

$$|u_\nu c_{\nu,\alpha}| \leq \frac{1}{[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha]!} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1)$$

ou, ce qui revient au même, aux suivantes

$$\left|\frac{(y_\nu - a_\nu)\,c_{\nu,\alpha}}{x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}(x_\nu - x_0)\ldots(x_\nu - x_{\nu-1})}\right| \leqq \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha\right]!},$$

alors cette série de puissances pour $f(x)$ sera toujours convergente. Or, il est toujours possible d'atteindre ce but d'une infinité de manières, *car les points de l'ensemble* Q *doivent recouvrir le plan de la variable complexe x d'une manière* PARTOUT DENSE; en effet, d'après cela, les y_ν peuvent être choisis suffisamment voisins des a_ν pour que les valeurs absolues des ν grandeurs

$$(y_\nu - a_\nu)\,\frac{c_{\nu,\alpha}\left[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha\right]!}{x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}(x_\nu - x_0)\ldots(x_\nu - x_{\nu-1})}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1)$$

soient toutes inférieures à *l'unité*.

Par conséquent, l'expression

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \varphi_\nu(x)$$

représente une fonction uniforme analytique, possédant un seul point singulier essentiel $x = \infty$, qui, pour tous les arguments pris dans l'ensemble *dénombrable* P, prend seulement des valeurs appartenant à l'ensemble *partout dense* Q; que les constantes u_ν s'évanouissent toutes à partir d'un certain indice déterminé, c'est ce que l'on peut toujours empêcher, cela saute aux yeux, au moyen d'un choix convenable des points y_ν.

Corollaire. — Un théorème analogue a lieu lorsque l'ensemble dénombrable P est formé de points tous *réels* et que l'ensemble Q est partout dense sur l'*axe des quantités réelles*.

II.

Applications. — Pour faire des applications de ce théorème général, je vais d'abord supposer que l'ensemble P est constitué par la totalité des *nombres complexes rationnels* et que l'on a, par conséquent,

$$x_\nu = x'_\nu + i x''_\nu,$$

où x'_ν, x''_ν désignent des nombres rationnels réels. L'ensemble Q peut, ce qui est permis, être identique à l'ensemble P. On a alors ce théorème :

Il existe une infinité de fonctions TRANSCENDANTES *de la variable complexe x qui, pour toutes les valeurs rationnelles de leur argument, prennent elles-mêmes des valeurs toutes rationnelles.*

Cette propriété, par conséquent, n'est *pas* caractéristique pour les fonctions rationnelles de x à coefficients rationnels. Il est vrai que l'on a, d'après M. Hilbert [1], le théorème :

« Lorsqu'une fonction *algébrique* de x, pour toutes les valeurs réelles rationnelles comprises dans un intervalle, quelque petit qu'il soit, prend toujours elle-même des valeurs rationnelles, alors cette fonction est nécessairement rationnelle. »

Qu'une fonction analytique qui, pour toutes les valeurs réelles rationnelles de l'argument, prend ellemême des valeurs réelles rationnelles, doive être nécessairement une fonction rationnelle; c'est ce qu'Émile Strauss, mathématicien plein de talent, mort prématurément, avait cherché à démontrer en 1886; mais

---

[1] *Journal de Crelle,* t. 110, p. 129; 1892.

Weierstrass, à qui il avait annoncé qu'il recherchait cette démonstration, lui fit remarquer l'inutilité de ses efforts. En effet, Weierstrass construisit une fonction *transcendante* de x possédant la propriété exigée.

Avec sa bienveillante autorisation, je puis ici communiquer le passage en question de sa lettre du 19 mars 1886 à Strauss [1] :

« ... On posera (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\varphi_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{n+1-\nu}{\nu} \right)^2 x^2 \right],$$

$$f_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x);$$

alors $\varphi_n(x)$, $f_n(x)$ sont des fonctions rationnelles entières de x à coefficients numériques tous rationnels; le degré de la première est $2n$, celui de l'autre est

$$2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1).$$

» On posera enfin

$$\begin{aligned}
m_1 &= 1, \\
m_2 &= m_1 + 1.2 + 1, \\
m_3 &= m_2 + 2.3 + 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
m_{\nu+1} &= m_\nu + \nu(\nu+1) + 1. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

» On peut alors déterminer une série infinie de nombres rationnels

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots,$$

[1] Je dois une copie de cette lettre à la bonté de M^{me} M. Speyer, née Strauss, que je saisis l'occasion de remercier ici.

en sorte que l'expression

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{m_1} f_1(x) + a_2 x^{m_2} f_2(x) + \ldots + a_n x^{m_n} f_n(x) + \ldots$$

soit une fonction transcendante entière de x et soit représentable par une série de puissances toujours convergente de la forme

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

où les coefficients sont tous des nombres rationnels.

» A cet effet, prenons une série quelconque de puissances de x, toujours convergente

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$$

à coefficients tous positifs, et alors (pour chaque valeur déterminée de n) choisissons a_n de telle sorte que, dans la fonction développée suivant les puissances de x

$$a_n x^{m_n} f_n(x),$$

le coefficient de chaque terme soit en valeur absolue plus petit que le coefficient du terme renfermant la même puissance de x dans la série

$$C_0 + C_1 x + \ldots.$$

» Alors, non seulement l'expression $f(x)$ sera convergente pour chaque valeur finie de x, mais encore elle peut être aussi transformée en une série de puissances toujours convergente jouissant de la propriété énoncée. Il est clair en même temps que, dans cette série, les coefficients de

$$x^{m_1}, \quad x^{m_2}, \quad \ldots, \quad x^{m_n}, \quad \ldots$$

sont respectivement

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n;$$

et, par conséquent, lorsqu'on prend les nombres a_1, a_2,

a_3, ... de telle sorte qu'à partir d'un rang déterminé ils ne soient pas tous égaux à zéro, la série

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

est une série *infinie* et représente par suite une fonction *transcendante* entière de x.

» Ceci posé, soit maintenant x_0 un nombre rationnel quelconque, différent de zéro, que l'on mettra sous la forme

$$\pm \frac{\lambda}{\mu},$$

où λ, μ sont des nombres entiers positifs sans diviseur commun; on a alors

$$\varphi_{\lambda+\mu-1}(x_0) = 0;$$

par conséquent, toutes les fonctions $f_n(x)$ pour lesquelles on a

$$n \geqq \lambda + \mu - 1,$$

s'évanouissent pour $x = x_0$ et $f(x)$ possède une valeur *rationnelle*.

» Il en est de même pour $x = 0$ et l'on a donc démontré que :

» Il existe des fonctions *transcendantes* entières d'une variable, jouissant de cette propriété que, pour *chaque* valeur rationnelle de leur argument, elles ont également une valeur rationnelle.... »

« J'observerai encore qu'il est possible (de bien des manières) de former une fonction transcendante entière de x qui ait des coefficients tous rationnels et qui, pour chaque valeur algébrique de x, ait également une valeur algébrique. »

Inspiré par cette dernière remarque de Weierstrass, Strauss a cherché à construire une pareille fonction transcendante de x et il s'y est pris comme il suit ([1]) :

A l'exemple de M. Georg Cantor ([2]) à toute fonction numérique irréductible de x

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

on attribuera comme *hauteur* (Höhe) le nombre entier positif

$$h = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n|.$$

Le produit de toutes les fonctions de même hauteur h est une fonction entière de x à coefficients entiers, divisible par x, que l'on désignera par $f_n(x)$. Si l'on forme alors les produits

$$g_h(x) = \prod_{\lambda=1}^{h} f_\lambda(x) \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots, \infty),$$

l'expression

$$G(x) = \sum_{h=1}^{\infty} x^{\mu_h} g_h(x),$$

où les μ_h doivent être des nombres entiers positifs, jouit, cela saute aux yeux, de cette propriété, qu'à chaque valeur algébrique de x (dans la région de convergence) correspond une valeur algébrique de $G(x)$.

Si l'on définit maintenant les nombres μ_h au moyen des équations

$$\begin{gathered}\mu_h = M_1 + M_2 + \ldots + M_h \\ + (h-1)\lambda_1 + (h-2)\lambda_2 + \ldots + 2.\lambda_{h-1} + 1.\lambda_h \\ (h = 1, 2, 3, \ldots, \infty),\end{gathered}$$

([1]) *Berichte des freien Deutschen Hochstiftes zu Frankfurt am Main* (neue Folge. Dritter Band, p. 18-29; 1890).

([2]) *Journal de Crelle*, t. 77, p. 259; 1873.

où $M_1, M_2, \ldots, M_h$ désignent respectivement les coefficients les plus élevés en valeur absolue de $g_1, g_2, \ldots, g_h$, et où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ désignent respectivement les degrés de ces derniers produits, alors $G(x)$ est une série de puissances de x qui a pour cercle de convergence *le cercle qui a pour rayon l'unité.*

Que $G(x)$ ne représente aucune fonction *rationnelle* de x, c'est ce qui est facile à reconnaître.

En effet, la puissance la plus élevée de x dans

$$x^{\mu_{h-1}} g_{h-1}(x)$$

a pour exposant $\mu_h - M_h$; la puissance la moins élevée de x dans

$$x^{\mu_h} g_h(x)$$

a pour exposant $\mu_h + 1$, de telle sorte que les M_h puissances de x intermédiaires ont pour coefficient zéro. Maintenant, comme les grandeurs M_h pour h croissant surpassent toute limite finie, il ne peut exister entre les coefficients de la série de puissances $G(x)$ aucune formule de récurrence d'ordre fini, comme cela devrait avoir lieu si cette série de puissances représentait une fonction *rationnelle* de x.

Néanmoins, lorsque de ce qui précède Strauss conclut qu'il a trouvé en $G(x)$ une fonction *transcendante* jouissant de la propriété requise, il oublie alors cette possibilité que le prolongement analytique de sa série de puissances, pourrait bien ne pas fournir une fonction *rationnelle,* mais une fonction *algébrique* de x. *Sa démonstration, d'ailleurs très ingénieuse, ne peut donc pas être regardée comme valable.*

On peut du reste combler cette lacune. Dans ce but il suffit en effet d'observer qu'à chaque valeur *rationnelle* de x (à l'intérieur du cercle de rayon égal à l'unité) correspond une valeur *rationnelle* de $G(x)$ et de se rappeler alors le théorème précédemment cité de M. Hilbert. Par conséquent $G(x)$ représente effectivement une fonction *transcendante* de x.

Mais, même si l'on fait abstraction du fait que l'exemple indiqué par Strauss ne possède pas la simplicité désirable, il se présente encore le défaut essentiel qui suit. Cet exemple montre seulement qu'à chaque valeur algébrique de x *intérieure au cercle de rayon égal à l'unité* peut correspondre une valeur algébrique d'une fonction transcendante ; et ainsi reste encore ouverte la question de savoir s'il existe aussi des fonctions transcendantes de x pour lesquelles, à *chaque* argument (fini) algébrique, correspond une valeur algébrique de la fonction.

Cette question doit être résolue affirmativement; c'est ce qui résulte de mon théorème général, quand pour ensemble P *l'on prend la totalité des nombres algébriques et que l'on suppose l'ensemble* Q *identique à l'ensemble* P. Il est à peine nécessaire de dire que pour un choix convenable des nombres algébriques qui forment l'ensemble P, l'on peut obtenir pour $f(x)$ une série de puissances, toujours convergente, à coefficients tous *rationnels*.

D'ailleurs, lorsqu'on a une telle série de puissances $f(x)$ *toujours convergente*, on peut aussi assigner immédiatement une infinité de séries de puissances à *convergence limitée* jouissant de la même propriété et représentant également des fonctions *transcendantes*. A cet effet, l'on a besoin seulement d'adjoindre à $f(x)$ une série de puissances provenant d'une équation algébrique quelconque

$$g(x, y) = 0,$$

à coefficients entiers.

Et l'on peut encore aller plus loin. Si l'on suppose que P est constitué par tous les nombres *algébriques* et Q par tous les nombres *rationnels*, on obtient ce théorème :

Il existe une infinité de fonctions transcendantes de x, qui, pour toutes les valeurs algébriques *de l'argument, prennent elles-mêmes des valeurs toutes* rationnelles.

Qu'il existe des fonctions d'une variable *réelle*, qui, pour toutes les valeurs réelles algébriques de l'argument, prennent elles-mêmes des valeurs toutes réelles rationnelles, c'est ce qui m'a été communiqué oralement par M. Georg Cantor; cela m'a inspiré le désir de démontrer le théorème correspondant pour les fonctions d'une variable *complexe*.

La remarque suivante servira ici de conclusion.

D'après M. Lindemann [1] la fonction e^x possède cette propriété de prendre pour toutes les valeurs *algébriques* de l'argument, *la valeur zéro exceptée*, des valeurs *transcendantes*. Mais il existe aussi des fonctions analytiques de x, pour lesquelles à chaque valeur algébrique de l'argument, *sans exception*, correspond une valeur transcendante de la fonction; en effet, ici, l'on a seulement besoin de supposer que l'ensemble P est la totalité des nombres algébriques, tandis que l'ensemble Q est la totalité des nombres transcendants complexes.

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. XX, p. 224; 1882.