NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 94-99

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__94_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1542.

(1885, p. 392.)

Étant donnés deux plans fixes, on considère deux sphères de même rayon, tangentes entre elles, et touchant chacune un des deux plans.

Le point commun de l'une des deux sphères avec le plan correspondant étant donné, on demande le lieu du point commun aux deux sphères lorsque l'on fait varier leur rayon. (GENEIX-MARTIN.)

SOLUTION

Par M. A. THEVENET,

Élève à l'École Lacordaire.

Soit M le point de contact donné.

La sphère S, tangente à Q au point M, a son centre sur la normale $M\Delta$.

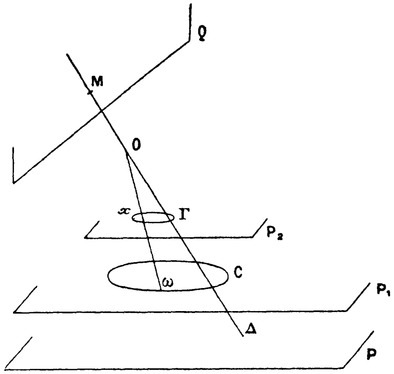
Je me fixe un rayon

$$R = MO,$$

O sera alors le centre de la sphère S, qui a pour rayon R

Le centre de la sphère Σ, tangente à P, sera dans un plan P_1

Fig. 1.



dont la distance à P sera précisément R. Or, les deux sphères S et Σ étant tangentes, la distance de leurs centres est $2R$. Si donc du point O comme centre je décris la sphère de rayon $2R$, elle coupe le plan P_1 suivant un petit cercle C, qui sera le lieu du centre de Σ pour la valeur donnée de R.

Et le lieu du point de contact pour cette valeur sera le cercle section du cône OC par le plan P_2 équidistant de O et de P_1.

Je vois donc déjà que le lieu cherché est une surface du deuxième degré, dont une direction de plans cycliques est P.

Cherchons si cette surface a des ombilics réels.

Pour que le cercle Γ ait un rayon nul, il faut que le cercle C ait aussi un rayon nul. La sphère décrite de O, avec $2R$ pour rayon, doit donc être tangente au plan P_1.

La distance de O au plan P sera alors $3R$.

Considérons le plan mené par $M\Delta$ perpendiculairement à P. Soit i la trace de $M\Delta$ sur P.

Je dois avoir

$$\frac{MO}{Og} = \frac{1}{3}.$$

Or

$$\frac{Oi}{Mi} = \frac{Mi - MO}{Mi} = \frac{Og}{MK}.$$

Je dois donc avoir

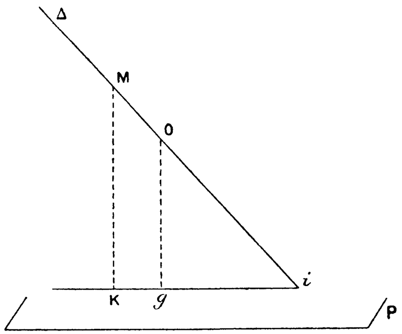
$$\frac{Mi - MO}{Mi} = \frac{3MO}{MK},$$

d'où

$$\overline{\mathrm{MO}} = \frac{\overline{\mathrm{M}i}.\ \overline{\mathrm{MK}}}{3\,\overline{\mathrm{M}i} + \overline{\mathrm{MK}}},$$

longueur que je puis construire. J'ai ainsi un ombilic de la surface. J'en aurai un autre de la même manière, en prenant un centre de S au-dessus de M.

Fig. 2.



J'ai donc deux ombilics réels. Mais les plans, parallèles aux plans tangents en ces ombilics et situés entre eux, donnent des sections imaginaires, car il est évident que si je prends MO très petit, la sphère de rayon $2R$, décrite de O, ne coupera plus le plan P_1 correspondant.

La surface lieu est donc un hyperboloïde à deux nappes.

J'en ai deux ombilics, donc le centre; et j'en ai un point quelconque par la méthode indiquée.

SOLUTION ANALYTIQUE.

Soit pris le point de contact fixe pour origine des coordonnées, et pour plan $z = 0$ le plan correspondant.

L'équation de la sphère S qui le touche est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda z = 0.$$

Soit

$$Ax + By + Cz + d = 0$$

l'équation du deuxième plan.

Le centre de la deuxième sphère S est un point α, β, γ qui, a cause de l'égalité des deux sphères, vérifie la relation

$$(1)\qquad \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \lambda.$$

Ce point se trouve aussi sur la sphère décrite du centre de S avec un rayon double de celui de S. On a donc

$$(2)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - \lambda)^2 = 4\lambda^2.$$

Le point O, milieu du segment déterminé par les centres de S et de S', est un point du lieu. Soient X, Y, Z ses coordonnées. On a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{\alpha}{2},\\ Y &= \frac{\beta}{2},\\ Z &= \frac{\gamma + \lambda}{2}.\end{aligned}\right.$$

Pour avoir le lieu, j'élimine α, β, γ, λ, entre les relations (1), (2) et (3). Pour cela, remplaçant, dans (1) et (2), α, β, γ par leurs valeurs tirées de (3), j'ai

$$(1')\qquad \frac{2AX + 2BY + C(2Z - \lambda) + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \lambda,$$

$$(2')\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\lambda Z = 0.$$

Cette dernière relation exprime que le point X, Y, Z du lieu est sur la sphère S.

L'élimination de λ entre (1') et (2') donne le lieu

$$\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2Z} = \frac{2(AX + BY + CZ) + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + C}.$$

Ordonnons cette équation. Elle devient

$$\left[\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + C\right](X^2 + Y^2) \\ - \left[\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - 3C\right] Z^2 - 4AXZ - 4BYZ - 4DZ = 0.$$

1° Cette surface, qui est du deuxième ordre, admet la direction des plans

$$Z = k$$

comme direction cyclique. En particulier, le plan

$$z = 0$$

la coupe suivant un cercle de rayon nul.

2° Il est facile de vérifier que la direction du plan

$$AX + BY + CZ = 0$$

est aussi circulaire; car elle donne

$$AX + BY = - CZ,$$

et l'équation de la surface devient, quand j'ai remplacé $(AX + BY)$ par $- CZ$:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)\left(\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + C\right) - 4DZ = 0,$$

ce qui montre que l'intersection du plan et de la surface est la même que celle d'une sphère et de ce plan.

3° On aurait aisément les coordonnées du centre.

4° On pourrait discuter la surface, en considérant les plans

$$AX + BY + CZ = h.$$

Soient h', h'' les valeurs de h donnant des ombilics; on donnerait alors à h une valeur h_0 comprise entre h' et h'', et l'on verrait que le plan

$$AX + BY + CZ = h_0$$

donne une section imaginaire; ce qui montrerait que la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Mais le calcul serait long; et il semble que le plus simple soit encore de recourir à l'équation en S, laquelle donne assez rapidement le résultat.

Question 1557.

(1885, p. 536.)

Par un point M, *pris d'une manière quelconque sur le côté* BC *du triangle* ABC, *on mène des parallèles aux côtés* AC, AB.

Ces droites coupent respectivement aux points B', C' *les côtés* AB *et* AC. *Démontrer que, si la droite qui joint le* *sommet* A *au point* I *de rencontre des droites* B′C *et* BC *coupe la droite* B′C′ *au point* M′, *on a*

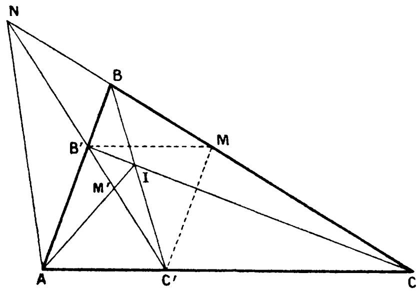
$$\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{MB}{MC}.$$

(D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. H. LEZ.

Dans le quadrilatère AB′IC′, prolongeant la diagonale B′C jusqu'à sa rencontre avec la diagonale extérieure BC, et joignant le point de rencontre N au sommet A, les quatre droites



NA, BA, IA et CA formeront un faisceau harmonique, ce qui permettra d'écrire, au signe près,

$$\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{NB'}{NC'}.$$

Mais, par construction, B′M étant parallèle à AC, les triangles semblables NB′M, NC′C donneront

$$\frac{NB'}{NC'} = \frac{MB'}{CC'};$$

de même, les triangles semblables BMB′, MCC′ donnent aussi

$$\frac{MB'}{CC'} = \frac{MB}{MC}.$$

Donc

$$\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{MB}{MC}.$$

C. Q. F. D.