Nouvelles annales de mathématiques

X. Antomari

Sur les conditions qui expriment qu'une équation algébrique de degré m n'a que p racines distinctes $(p < m)$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 63-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__63_0>

[A3c]

SUR LES CONDITIONS QUI EXPRIMENT QU'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE DE DEGRÉ m N'A QUE p RACINES DISTINCTES ($p < m$);

PAR M. X ANTOMARI.

1. La difficulté de ce problème réside dans ce fait qu'une équation algébrique de degré m peut n'avoir que p racines distinctes de plusieurs manières. Considérons, en effet, l'équation indéterminée à p inconnues

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p = m, \tag{1}$$

et soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ une solution de cette équation, *telle qu'aucune des inconnues ne soit nulle et que toutes soient des nombres entiers et positifs*. Une équation algébrique de degré m, qui a une racine d'ordre α_1, une racine d'ordre α_2, etc., enfin une racine d'ordre α_p, n'a évidemment que p racines distinctes; il en résulte qu'il y a, pour une équation de degré m, autant de manières d'avoir p racines distinctes seulement qu'il y a de solutions de l'équation (1) en nombres entiers, positifs et tous différents de zéro.

Si donc on exprime que l'équation considérée n'a que p racines distinctes, on exprime par cela même qu'elle a une racine d'ordre α_1, une racine d'ordre α_2, etc. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ désignant l'une quelconque des solutions de l'équation (1) en nombres entiers, positifs et tous différents de zéro. On trouve ainsi un système de conditions qui doit se décomposer en autant de systèmes qu'il y a, pour l'équation (1), de solutions de l'espèce considérée, de sorte qu'à chaque solution il correspond un système de conditions. Dans ce qui suit, je me propose de montrer comment on peut trouver le système de conditions qui correspond à une solution donnée de l'équation (1). Je m'appuie pour cela sur le théorème suivant :

2. *Pour qu'une équation algébrique et entière $f(x) = 0$, de degré m, n'ait que p racines distinctes, il faut et il suffit qu'il existe deux polynomes entiers en x, $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{p-1}(x)$ premiers entre eux, de degrés respectifs p et $p-1$ et vérifiant l'identité*

$$\varphi_p(x) f'(x) = \varphi_{p-1}(x) f(x), \tag{2}$$

$f'(x)$ désignant la dérivée de $f(x)$.

Soient, en effet, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les p racines distinctes de l'équation et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs, tels que l'on ait, d'ailleurs,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = m.$$

On a alors

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \frac{\alpha_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{x-a_p};$$

de sorte que, si l'on pose

$$\varphi_p(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_p),$$

$$\varphi_{p-1}(x) = \sum \alpha_1 (x-a_2)\ldots(x-a_p),$$

on a bien l'identité

$$\varphi_p(x) f'(x) = \varphi_{p-1}(x) f(x).$$

La condition est donc nécessaire, car il est évident que les polynomes $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{p-1}(x)$ sont premiers entre eux.

Il faut prouver que la condition est suffisante. Pour cela, observons d'abord que si $\frac{f'(x)}{f(x)}$ est décomposée en fractions simples, les fractions obtenues ont leurs dénominateurs respectifs du premier degré. Cela posé, supposons l'identité (2) vérifiée et les polynomes $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{p-1}(x)$ premiers entre eux; on en déduit la nouvelle identité

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\varphi_{p-1}(x)}{\varphi_p(x)},$$

en vertu de laquelle la décomposition du second membre en fractions simples ne doit donner que des fractions à dénominateurs du premier degré, d'après la remarque faite plus haut; par suite, $\varphi_p(x) = 0$ *doit avoir ses p racines distinctes,* et, en effectuant la décomposition, on aura une nouvelle identité de la forme

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \frac{\alpha_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{x-a_p};$$

en remontant aux fonctions primitives, on en déduit successivement

$$\mathrm{L}\, f(x) = \mathrm{LC}(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}$$

et

$$f(x) = \mathrm{C}(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}.$$

Comme, d'ailleurs, $f(x)$ est un polynome entier en x, de degré m, cette nouvelle identité ne peut avoir lieu que si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres entiers et positifs, tous différents de zéro et vérifiant l'égalité $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = m$. Il en résulte bien que l'équation $f(x) = 0$ n'a que p racines distinctes et que la condition est suffisante.

3. Étant donnée maintenant une solution particulière $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de l'équation (1), proposons-nous d'ex-

primer qu'une équation $f(x)=0$, de degré m, a une racine multiple d'ordre α_1, une racine multiple d'ordre α_2, ..., enfin une racine multiple d'ordre α_p. Pour résoudre ce problème, on pourrait procéder de la manière suivante :

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les racines d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; on a alors

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{\alpha_1}{x - a_1}, \tag{3}$$

d'où l'on tire

$$\left\{\begin{array}{l} (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_p)f'(x) \\ \quad = f(x) \sum \alpha_1(x-a_2)\ldots(x-a_p). \end{array}\right. \tag{4}$$

Par conséquent, pour qu'une équation de degré m ait une racine d'ordre α_1, une racine d'ordre α_2, ..., il faut qu'on puisse déterminer p quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$ telles qu'on ait l'identité (4).

La réciproque est vraie, car on passe facilement de l'identité (4) à l'identité (3), de laquelle on déduit

$$f(x) = C(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}.$$

D'après cela, pour résoudre le problème, il suffira d'éliminer $a_1, a_2, \ldots, a_p$ entre les équations qu'on obtient en identifiant les deux membres de (4). On obtient ainsi $m+p-1$ équations d'identification, puisque $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = m$, et si l'on élimine a_1, $a_2, \ldots, a_p$ entre ces équations, on obtient $m-1$ équations de condition, c'est-à-dire plus de conditions qu'il n'en faut, puisque, pour exprimer toutes les conditions du problème, il suffit de

$$\alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \ldots + \alpha_p - 1 = m - p \text{ conditions.}$$

Outre la difficulté d'élimination des quantités $a_1, a_2, \ldots,$

a_p, la méthode que nous venons d'expliquer présente donc l'inconvénient de donner des conditions en nombre surabondant.

4. Difficulté et inconvénient disparaissent si l'on fait usage du théorème démontré au n° 2. Si l'on cherche, en effet, par la méthode des coefficients indéterminés les polynomes $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{p-1}(x)$, qui vérifient l'identité

$$f'(x)\varphi_p(x) = f(x)\varphi_{p-1}(x),$$

on obtient $m+p$ équations linéaires et homogènes à $2p+1$ inconnues, et l'élimination des inconnues, qui sont les coefficients des polynomes $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{p-1}(x)$, fournissent exactement $m-p$ conditions entre les coefficients de l'équation $f(x)=0$. Seulement, on se trouve alors en présence d'une autre difficulté; car, si au lieu de considérer la solution $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ de l'équation (1), on en avait considéré une autre, rien ne distinguant ces solutions dans la suite des calculs, on aurait trouvé les mêmes $m-p$ conditions. Il en résulte, ainsi que cela a déjà été dit au début, que ces $m-p$ conditions doivent se décomposer en systèmes en nombre égal au nombre des solutions de l'équation (1) en nombres entiers, positifs et tous différents de zéro.

5. Une solution de l'équation (1) étant donnée, il s'agit maintenant de trouver le système de conditions correspondant. Pour cela, appelons $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ la solution considérée. Si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont les p racines de $\varphi_p(x)=0$, racines qui sont distinctes en vertu du théorème démontré au n° 2, le polynome $\varphi_{p-1}(x)$ est égal à $\Sigma\alpha_1(x-a_2)\ldots(x-a_p)$, en vertu de 4. On a donc

$$\alpha_1 = \frac{\varphi_{p-1}(a_1)}{\varphi'_p(a_1)}, \qquad \alpha_2 = \frac{\varphi_{p-1}(a_2)}{\varphi'_p(a_2)}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_p = \frac{\varphi_{p-1}(a_p)}{\varphi'_p(a_p)}.$$

Considérons alors les équations

$$(5)\qquad \varphi_p(x)=0 \quad \text{et} \quad \varphi_{p-1}(x)+\lambda\varphi'_p(x)=0.$$

Si l'on remplace λ par $-\alpha_1$ dans la dernière, les deux équations ont une racine commune a_1; elles ont une racine commune a_2 si l'on remplace λ par $-\alpha_2$, et ainsi de suite. Si donc l'on élimine x entre les deux équations (5), l'équation résultante $R(\lambda)=0$, qui est de degré p et dont les coefficients sont des fonctions des coefficients de $\varphi_p(x)$ et de ceux de $\varphi_{p-1}(x)$, par suite des fonctions des coefficients de $f(x)$, cette équation $R(\lambda)=0$, disons-nous, admettra les racines $-\alpha_1$, $-\alpha_2, \ldots, -\alpha_p$ si l'équation $f(x)=0$ a une racine d'ordre α_1, une racine d'ordre α_2, etc.; elle admettra pour racines $-\alpha'_1, -\alpha'_2, \ldots, -\alpha'_p$, si $f(x)=0$ a p racines d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p$, et ainsi de suite.

L'équation $R(\lambda)=0$ permettra donc de distinguer les uns des autres les divers systèmes de solutions. C'est elle qui caractérise et définit nettement les divers cas qui peuvent se présenter.

Nous allons appliquer ces considérations à deux exemples.

6. Soit d'abord à exprimer qu'une équation du quatrième degré

$$f(x)=x^4+px^2+qx+r=0$$

n'a que deux racines distinctes. Si cette équation n'a que deux racines distinctes, elle peut avoir, ou deux racines doubles, ou une racine simple et une triple. Dans les deux cas, il faut et il suffit qu'il existe un polynome du premier degré $\alpha x+\beta$ et un polynome du second degré $Ax^2 + ux + v$ vérifiant l'identité

$$(\alpha x + \beta)(x^4 + px^2 + qx + r) \\ = (Ax^2 + ux + v)(4x^3 + 2px + q).$$

On peut d'ailleurs supposer $A = 1$, puisque le degré du polynome $Ax^2 + ux + v$ ne doit pas être inférieur à 2, et comme alors α est évidemment égal à 4, l'identité précédente s'écrit

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (4x + \beta)(x^4 + px^2 + qx + r) \\ \quad = (x^2 + ux + v)(4x^3 + 2px + q). \end{array} \right.$$

Actuellement, on a

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= x^2 + ux + v, \\ \varphi'_p(x) &= 2x + u, \\ \varphi_{p-1}(x) &= 4x + \beta, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation

$$\varphi_{p-1}(x) + \lambda\varphi'_p(x) = 0$$

s'écrit

$$2(2 + \lambda)x + \beta + \lambda u = 0.$$

Si l'on élimine x entre cette équation et l'équation $\varphi_p(x) = 0$, on obtient

$$(\beta + \lambda u)^2 - 2u(2 + \lambda)(\beta + \lambda u) + 4v(2 + \lambda)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(7) \quad (4v - u^2)\lambda^2 + 4\lambda(4v - u^2) + \beta^2 - 4\beta u + 16v = 0.$$

Quand l'équation $f(x) = 0$ a deux racines doubles, -2 doit être racine double de l'équation (7); on doit donc avoir

$$\beta^2 - 4\beta u + 4u^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = 2u.$$

Quand, au contraire, l'équation f a une racine triple et une simple, l'équation (7) a pour racines -1 et -3.

La somme des racines étant -4, il suffit d'exprimer que -1 est racine, ce qui donne

$$\beta^2 - 4\beta u + 3u^2 + 4v = 0.$$

Ainsi, suivant que l'équation du quatrième degré a deux racines doubles ou une racine triple et une double, on doit avoir

$$\beta = 2u \tag{8}$$

ou

$$\beta^2 - 4\beta u + 3u^2 + 4v = 0. \tag{9}$$

Cela posé, identifions les deux membres de l'égalité (6); il vient alors

$$\begin{aligned} \beta &= 4u, \\ 4p &= 2p + 4v, \\ 4q + \beta p &= q + 2pu, \\ \beta q + 4r &= qu + 2pv, \\ \beta r &= qv. \end{aligned}$$

Si l'on élimine β, u et v entre ces équations, on trouve facilement

$$\left\{ \begin{aligned} 2p^3 - 8pr + 9q^2 &= 0, \\ q(p^2 + 12r) &= 0. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

On a d'ailleurs

$$u = -\frac{3q}{2p}, \qquad v = \frac{p}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = -\frac{6q}{p}.$$

Si l'on porte maintenant les valeurs de u, v et β dans les équations (8) et (9), la première de ces équations donne $q = 0$ et la deuxième donne pareillement $8p^3 + 27q^2 = 0$. Donc $q = 0$ caractérise le cas de deux racines doubles et $8p^3 + 27q^2 = 0$ caractérise le cas d'une racine simple et d'une racine triple. Il en résulte que, si l'on élimine r entre les équations (10), on doit trouver $q = 0$ dans le premier cas et $8p^3 + 27q^2 = 0$ dans le deuxième. Autrement, le système (10) se décompose en deux

$$\begin{aligned} q &= 0 \\ 2p(p^2 - 4r) &= 0 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} 2p^3 - 8pr + 9q^2 &= 0, \\ p^2 + 12r &= 0. \end{aligned}$$

Le premier de ces systèmes correspond au cas de deux racines doubles et le second *doit* correspondre au cas d'une racine triple et d'une simple; par conséquent, en éliminant r entre les équations de ce dernier système, on doit trouver $8p^3 + 27q^2 = 0$. On le constate sans aucune difficulté. En résumé, si l'on observe que p ne peut pas être nul, on voit qu'il y a deux racines doubles si l'on a

$$q = 0 \quad \text{avec} \quad p^2 - 4r = 0,$$

une racine triple et une simple si l'on a

$$8p^3 + 27q^2 = 0 \quad \text{et} \quad p^2 + 12r = 0.$$

7. Soit maintenant à exprimer qu'une équation du cinquième degré

$$f(x) = x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

n'admet que deux racines distinctes.

Posons, comme dans l'exemple précédent,

$$\varphi_p(x) = x^2 + ux + v, \qquad \varphi_{p-1}(x) = \alpha x + \beta,$$

et formons l'équation

$$\varphi_{p-1}(x) + \lambda\,\varphi'_p(x) = 0;$$

nous obtenons ainsi

$$(\alpha + 2\lambda)x + \beta + \lambda u = 0,$$

de sorte que si l'on élimine x entre cette équation et

$\varphi_p(x) = 0$, il vient

$$(\beta + \lambda u)^2 - u(\beta + \lambda u)(\alpha + 2\lambda) + v(\alpha + 2\lambda)^2 = 0,$$

ou

$$(11)\quad (4v - u^2)\lambda^2 + \lambda(4v - u^2)\alpha + \beta^2 - \alpha\beta u + v\alpha^2 = 0.$$

Exprimons enfin que l'on a l'identité

$$\varphi_{p-1}(x) f(x) = \varphi_p(x) f'(x),$$

en vertu de laquelle on voit tout de suite que l'on doit avoir $\alpha = 5$, de sorte que l'identité s'écrit

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &(5x + \beta)(x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s) \\ &\quad = (x^2 + ux + v)(5x^4 + 3px^2 + 2qx + r), \end{aligned} \right.$$

et l'équation (11) devient

$$R(\lambda) = (4v - u^2)\lambda^2 + 5(4v - u^2)\lambda + \beta^2 - 5\beta u + 25v = 0.$$

L'identification des deux membres de (12) conduit aux équations

$$\begin{aligned} \beta &= 5u, \\ 2p &= 5v, \\ 3q + \beta p &= 3pu, \\ 4r + \beta q &= 2qu + 3pv, \\ 5s + \beta r &= ru + 2qv, \\ \beta s &= rv. \end{aligned}$$

Des trois premières équations on tire

$$v = \frac{2p}{5}, \qquad u = -\frac{3q}{2p}, \qquad \beta = -\frac{15q}{2p}$$

et, en portant dans les trois dernières, on obtient les équations de condition cherchées

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} 4r &= \frac{9q^2}{2p} + \frac{6p^2}{5}, \\ 5s &= \frac{6qr}{p} + \frac{4pq}{5}, \\ 15qs &+ \frac{4p^2r}{5} = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, si une équation du cinquième degré n'a que deux racines distinctes, elle peut avoir, soit une racine double et une racine triple, soit une racine quadruple et une simple. Le système de conditions trouvées doit donc se décomposer en deux autres correspondant aux deux cas qui peuvent se présenter. Dans le premier cas, l'équation $R(\lambda) = 0$ doit admettre les racines -2 et -3; elle doit admettre les racines -1 et -4 dans le second cas. Comme la somme des racines est toujours -5, pour exprimer qu'on est dans le premier cas, il suffit d'exprimer que -2 est racine; il suffit d'écrire que -1 est racine pour exprimer qu'on est dans le deuxième cas. On voit ainsi que si l'équation a une racine triple et une racine double, on doit avoir

$$v + 6u^2 = 0,$$

et que l'on doit avoir

$$9v + 4u^2 = 0$$

quand l'équation a une racine quadruple et une simple. Si l'on tient compte des valeurs trouvées pour u et pour v, ces équations s'écrivent respectivement

$$(14) \qquad \begin{cases} 4p^3 + 5 \times 27q^2 = 0, \\ 2p^3 + 5q^2 = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, si, entre les équations (13), on élimine r et s, l'équation en p et en q ainsi obtenue doit se décomposer en les deux équations (14).

Un calcul facile donne

$$4r = \frac{9q^2}{2p} + \frac{6p^2}{5},$$

$$5s = 3q\left[\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{13p}{15}\right].$$

En portant les valeurs de r et de s qu'on en déduit dans l'équation

$$15qs + \frac{4p^2 r}{5} = 0,$$

on obtient l'équation

$$5^2 \times 9^2 \times q^4 + 5 \times 3 \times 58 p^3 q^2 + 24 p^6 = 0,$$

de laquelle on tire

$$q^2 = \frac{-29 p^3 \pm 25 p^3}{5 \times 27},$$

c'est-à-dire

$$4 p^3 + 5 \times 27 q^2 = 0,$$

et

$$2 p^3 + 5 q^2 = 0,$$

qui sont bien les équations (14).

Ainsi, pour que l'équation

$$x^5 + p x^3 + q x^2 + r x + s = 0$$

ait une racine double et une racine triple, il faut et il suffit que l'on ait

$$4 p^3 + 5 \times 27 q^2 = 0, \qquad 4r = \frac{9q^2}{2p} + \frac{6p^2}{5},$$

$$5s = 3q\left[\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{13p}{15}\right];$$

pour qu'elle ait une racine quadruple, il faut et il suffit que l'on ait

$$2 p^3 + 5 q^2 = 0, \qquad 4r = \frac{9q^2}{2p} + \frac{9p^2}{5},$$

$$5s = 3q\left[\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{13p}{15}\right].$$

Dans le premier cas, les conditions s'écrivent plus simplement

$$4p^3 + 27q^2 = 0, \qquad 5r - p^2 = 0, \qquad 14pq - 25s = 0;$$

dans le second cas, elles s'écrivent de même

$$2p^3 + 5q^2 = 0, \qquad 20r + 9p^2 = 0, \qquad 50s - pq = 0.$$