R. BLONDLOT

# Nouvelle démonstration du théorème de Stokes

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 16 (1897), p. 501-504
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__501_1>

[D3d]

# NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE STOKES;

PAR M. R. BLONDLOT.

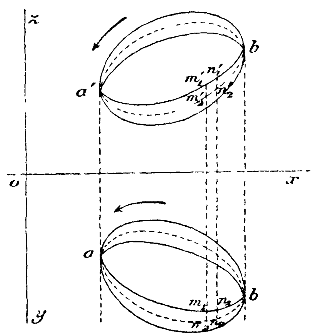
On donne communément le nom de *Théorème de Stokes* à la proposition qui exprime la transformation d'une intégrale prise le long d'un contour fermé sur une intégrale prise sur une surface limitée à ce contour. M. Ém. Picard fait toutefois remarquer avec raison que cette proposition était déjà connue d'Ampère, du moins dans des cas particuliers.

Il existe plusieurs démonstrations irréprochables de ce théorème; si je propose la suivante, c'est parce qu'elle me semble particulièrement simple et qu'on y voit l'intégrale superficielle naitre, pour ainsi dire, de l'intégrale curviligne :

Étant donné un contour fermé quelconque C, qu'un mobile parcourt dans un sens choisi arbitrairement et une surface quelconque S limitée à ce contour, nous appellerons *face positive de* S celle qui est telle qu'un personnage debout sur cette face, près du contour, voit le mobile qui parcourt C aller de sa droite vers sa gauche.

Soit P une fonction des coordonnées $x$, $y$, $z$ supposées rectangulaires. Considérons l'intégrale $\int P\,dx$ prise dans le sens de la circulation du mobile, et étendue à tout le contour C. Nous nous proposons de transformer cette intégrale curviligne en une intégrale superficielle prise sur S.

Figurons les projections de C d'après les conventions de la Géométrie descriptive, en prenant le plan XOZ pour plan vertical, le plan XOY pour plan horizontal supposé rabattu sur le plan vertical.




Soit A le point de C le plus rapproché, et B le point de C le plus éloigné du plan YOZ. Par ces deux points, traçons sur S une ligne simple quelconque, puis imaginons que cette ligne se dédouble, de façon à former un contour fermé limité aux points A et B et toujours situé sur la surface S et que ce contour fermé s'ouvre progressivement de façon à venir finalement coïncider avec C.

Soient maintenant $C_1$ et $C_2$ deux états infiniment voisins du contour variable ; nous allons évaluer la variation éprouvée par P lorsque le contour variable éprouve cette transformation infiniment petite. Pour cela, menons, parallèlement à YOZ, une série de plans infiniment rapprochés ; à chaque élément $M_1N_1$ ainsi découpé sur $C_1$ correspond un élément $M_2N_2$ découpé sur $C_2$ et ayant la même projection $dx$. Lorsqu'on passe de $C_1$ à $c_2$, un élément $P\,dx$ d'intégrale se transforme en un autre où $dx$ est le même et où P seul a varié, à cause de la variation de l'$y$ et de l'$x$ du milieu de l'élément de contour ; en appelant $\delta r$ et $\delta z$ ces variations, celle de P est

$$\frac{\partial P}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\delta z,$$

et celle de $\int P\,dx$ est

$$\int_{c_1} \frac{\partial P}{\partial y}\,\delta y\,dx + \frac{\partial P}{\partial z}\,\delta z\,dx.$$

Mais $\delta y\,dx$ est la projection sur le plan $xoy$ du quadrilatère infiniment petit $M_1M_2N_2N_1$ ; désignons cette projection par $\omega_z$. De même, $\delta z\,dx$ est la projection prise en signe contraire du même quadrilatère sur le plan $xoz$ ; désignons-la par $\omega_y$. La variation précédente peut alors s'écrire

$$\int \frac{\partial P}{\partial y}\,\omega_z - \frac{\partial P}{\partial z}\,\omega_y\,;$$

elle est ainsi exprimée par une intégrale de surface s'étendant à tous les éléments de la bande infiniment étroite balayée par le contour variable.

Lorsque, maintenant, ce contour variable passera d'un état initial dans lequel il embrasse sur S une aire nulle à un état final dans lequel il coïncide avec C, la somme des variations éprouvées par $\int P\,dx$ sera précisément la valeur de $\int_C P\,dx$, puisque, dans l'état initial considéré, l'intégrale est identiquement nulle. On a donc

$$\int_C P\,dx = \int_S \frac{\partial P}{\partial y}\,\omega_z - \frac{\partial P}{\partial z}\,\omega_y,$$

l'intégrale du second membre s'étendant à tous les éléments de toutes les bandes successivement balayées, c'est-à-dire à tous les éléments de S.

Remarquons que, cette dernière intégrale étant indépendante du mode de division de S en éléments infiniment petits, il s'ensuit que $\omega_y$ et $\omega_z$ peuvent être envisagées comme les projections d'un élément de surface de forme quelconque pris sur S.

Si l'on désigne par P, Q, R trois fonctions quelconques de $xyz$, on a, d'après ce qui précède,

$$\int_C P\,dx = \int_S \frac{\partial P}{\partial y}\,\omega_z - \frac{\partial P}{\partial z}\,\omega_y,$$

$$\int_C Q\,dy = \int_S \frac{\partial Q}{\partial z}\,\omega_x - \frac{\partial Q}{\partial x}\,\omega_z,$$

$$\int_C R\,dz = \int_S \frac{\partial R}{\partial x}\,\omega_y - \frac{\partial R}{\partial y}\,\omega_x.$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\omega_x + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\omega_y + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\omega_z:$$

c'est le théorème de Stokes; $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ sont définis comme les produits de l'élément $\omega$ pris sur la surface S par les cosinus des angles formés par les sens positifs des trois axes avec la normale à S menée du côté de la face positive, définie par le sens de l'intégration le long du contour.