NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON AUTONNE

Sur les symboles $\frac{o}{o}$ à plusieurs variables indépendantes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 420-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__420_1>

[D1d]

SUR LES SYMBOLES $\frac{0}{0}$ A PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. LÉON AUTONNE.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Soit X une fonction de x qui, pour $x = 0$ par exemple, prend la forme $\frac{0}{0}$. Pour $|x|$ assez petit, on a $X \equiv P_1(x) : P_0(x)$ avec $P_1(0) = P_0(0) = 0$. *On con-*

vient que la valeur X_0 de X pour $x = 0$ est la limite vers laquelle tend X quand x tend vers zéro. Si P_1 et P_0 pour $|x|$ assez petit se développent en séries de Taylor, des règles bien connues donnent X_0. Si X dépend de r variables distinctes $x, y, z, \ldots$ avec

$$X \equiv \frac{P_1(x, y, z, \ldots)}{P_0(x, y, z, \ldots)} \quad P_1(0, 0, \ldots) = P_0(0, \ldots) = 0,$$

on peut encore convenir que X_0 est la limite de X quand $|x|, |y|, |z|, \ldots$ tendent vers zéro. Seulement X_0 n'est plus unique et change avec la loi de décroissance simultanée des modules. Si P_1 et P_0 sont régulières, on peut (Weierstrass) obtenir pour X_0 tout nombre pris arbitrairement à l'avance.

Mais considérons N fonctions $X_i = P_i : P_0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $N \geqq r$, avec $P_i(0, \ldots) = P_0(0, \ldots) = 0$. Les X_{i0} ne sont plus *simultanément* arbitraires. Si l'on s'en donne quelques-unes, les autres s'en déduisent. Je pose alors le problème suivant :

Connaître tous les systèmes de valeurs-limites vers lesquelles tendent simultanément les rapports des P, quand les r variables tendent vers zéro de toutes les façons.

Une terminologie géométrique est commode. Dans un espace E_N à N dimensions, prenons les $N+1$ coordonnées homogènes ξ d'un point ξ, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$; considérons les $x, y, z, \ldots$ comme les coordonnées d'un point ζ dans un E_r. ξ et ζ sont liées par les relations

$$\rho \xi_j = P_j(x, y, z), \qquad \rho = \text{facteur de proportionnalité},$$
$$P_j(0, 0, \ldots) = 0.$$

Quand ζ tend vers le point ω $[x = y = z = \ldots = 0]$ suivant un certain *itinéraire* $\mathfrak{P}$, ξ tend vers une position limite $\overline{\xi}$, de coordonnées $\overline{\xi_j}$, *fournie* par $\mathfrak{P}$. Le problème est alors de *construire la figure* Ω_r *de* E_N, *lieu des points* $\overline{\xi}$, *fournis par tous les itinéraires possibles.*

Grâce aux magistrales recherches de Weierstrass sur les séries entières à plusieurs variables, on peut parvenir au but ([1]). La solution complète exige trop d'explications préliminaires pour être exposée ici; mais, dans le cas particulier ci-après, qui se laisse traiter d'une façon directe et très facile, on retrouve la méthode et les principales circonstances du procédé général.

II. — Construction d'une figure Ω.

Soient, pour $N = r = 2$, $j = 0, 1, 2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\xi_j = f_j(y) = c_j y^2 + 2A_j y + B_j, \\ A_j = a_j x^\alpha + x^{\alpha+1}(\ldots), \qquad \alpha, \beta = \text{entiers}, \\ B_j = b_j x^\beta - x^{\beta+1}(\ldots), \qquad A_j, B_j = \text{holomorphes en } x; \end{array}\right.$$

les neuf constantes a_j, b_j, c_j sont *quelconques* sans aucune relation particulière entre elles.

Quand y varie seul, ξ décrit dans le plan E_2 une conique Γ, dont l'équation s'obtient en éliminant ρ et y.

([1]) Le lecteur désireux d'approfondir la matière peut se reporter à mes autres publications.

Comptes rendus : Sur les variétés unicursales à deux dimensions (11 novembre 1895).

Sur les variétés unicursales à trois dimensions (9 et 30 décembre 1895).

Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes (18 janvier 1897).

Rendiconti du Cercle mathematique de Palerme, 1896.

Sur les pôles des fonctions uniformes à deux variables indépendantes.

Acta mathematica : Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes (à paraître).

Posons, l_j, m_j, n_j étant neuf quantités quelconques,

$$\begin{vmatrix} l_0 & l_1 & l_2 \\ m_0 & m_1 & m_2 \\ n_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = (lmn), \qquad \ldots:$$

le meilleur procédé d'élimination (Clebsch, *Leçons sur la Géométrie,* traduction A. Benoist, t. III, p. 292) est d'annuler le discriminant $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ du polynome quadratique en y

$$U(y) = \left(\xi f \frac{\partial f}{\partial y}\right) = y^2(\xi A c) + y(\xi B c) + (\xi B A),$$

d'où l'équation de Γ

$$P = (\xi B c)^2 - 4(\zeta A c)(\xi B A) = 0.$$

Sous le bénéfice de $P = 0$, l'équation $U(y) = 0$ a une racine double y, $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, d'où

$$(1) \qquad -y = \frac{(\xi B c)}{2(\xi A c)} = \frac{2(\xi B A)}{(\xi B c)} = \left[\frac{(\xi B A)}{(\xi A c)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour chaque valeur de x et de y, ξ est donné par l'intersection de la conique Γ avec une des droites (1). Quand x est infiniment petit, ξ tend vers un certain point de la courbe $\bar{\Gamma}$ limite de Γ. *La figure Ω_2 est située tout entière sur la courbe* $\bar{\Gamma}$.

Démontrons la réciproque : *un point quelconque μ, de coordonnées μ_i,* de $\bar{\Gamma}$ est sur Ω_2.

Supposons μ déterminé par l'intersection de $\bar{\Gamma}$ avec la droite q, $q_0\xi_1 - q_1\xi_0 = 0$, $q_1 : q_0 = \mu_1 : \mu_0 =$ quelconque. Soit λ un point où q coupe Γ ; l'équation $P(\lambda) = 0$ exprime qu'il existe au moins une racine η commune aux deux équations

$$\frac{f_0(y)}{\lambda_0} = \frac{f_1(y)}{\lambda_1} = \frac{f_2(y)}{\lambda_2}$$

ou aux trois équations

$$[ij], \qquad \lambda_i f_j(y) - \lambda_j f_i(y) = 0, \qquad i, j = 0, 1, 2,$$

savoir

$$(\lambda_i c_j - \lambda_j c_i)y^2 + (\lambda_i A_j - \lambda_j A_i)y + \lambda_i B_j - \lambda_j B_i = 0.$$

Pour x infiniment petit, *le point* λ *étant distinct du point* c, les deux racines de $[ij]$ sont infiniment petites et η est sûrement infiniment petit. x et η s'annulent à la fois.

Cela posé, construisons un itinéraire $\mathfrak{P}$ qui fournisse μ. Prenons $y = \eta(\lambda, x)$. x variant, λ varie, mais sans pouvoir quitter ni la conique Γ ni la droite q. A la limite, λ, qui coïncide avec ξ, vient sur $\overline{\Gamma}$ sans avoir pu quitter q; donc λ ou ξ vient en μ. C. Q. F. D.

Bref, Ω_2 est la conique $\ddot{\Gamma}$.

On a

$$(\xi Bc) = x^\beta(\xi bc) + x^{\beta+1}(\ldots),$$
$$(\xi Ac) = x^\alpha(\xi ac) + x^{\alpha+1}(\ldots),$$
$$(\xi AB) = x^{\alpha+\beta}(\xi ab) + x^{\alpha+\beta+1}(\ldots).$$

Pour obtenir $\ddot{\Gamma}$, il suffit de chercher la limite de la conique, après départ du facteur x^β,

$$x^\beta(\xi bc)^2 - 4x^{2\alpha}(\xi ac)(\xi ab) = 0. \tag{2}$$

Pour y, il vient

$$y = x^{\beta-\alpha}\left[-\frac{(\xi bc)}{2(\xi ac)} + x(\ldots)\right]. \tag{3}$$

$$= x^\alpha\left[-\frac{2(\xi ba)}{(\xi bc)} + x(\ldots)\right]. \tag{4}$$

$$= x^{\frac{1}{2}\beta}\left\{\left[\frac{(\xi ba)}{(\xi ac)}\right]^{\frac{1}{2}} + x(\ldots)\right\}. \tag{5}$$

formules qui permettent, un point $\bar{\xi}$ étant pris sur $\bar{\Gamma}$, de construire un itinéraire fournissant $\bar{\xi}$.

Remarque. — On a expressément exclu de la démonstration précédente le cas où le point μ coïncide avec le point c, de coordonnées c_j. Mais il est très facile de construire un $\mathfrak{P}$ qui fournisse c. Posons $x = y^\sigma$, avec $2 < 1 + \sigma\alpha$ et $2 < \sigma\beta$; alors dans f_j tous les termes sont négligeables devant le terme $c_j y^2$. Il suffit donc de choisir l'exposant positif σ assez grand pour que l'itinéraire $\mathfrak{P}$, $x = y^\sigma$, fournisse c.

On construira par un raisonnement analogue des $\mathfrak{P}$ fournissant les points a et b.

III. — Discussion.

$\beta = 2\alpha$. — $\bar{\Gamma}$ est la conique

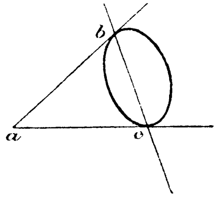
$$(\xi bc)^2 + 4(\xi ac)(\xi ab) = 0,$$

y est fourni par une quelconque des relations (3), (4) ou (5).

$\beta < 2\alpha$. — $\bar{\Gamma}$ est la droite double

$$(\xi bc)^2 = 0,$$

Fig. 1.

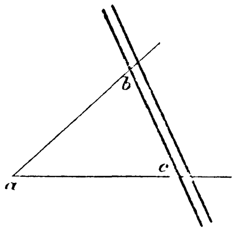


y est fourni par la relation (5).

$\beta > 2\alpha$. — Γ est la droite

$$(\xi ab) = 0.$$

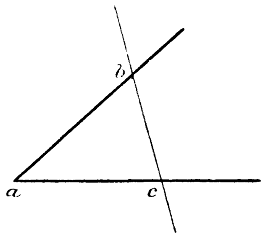
Fig. 2.



y est fourni par (3);

$$(\xi ac) = 0,$$

Fig. 3.



y est fourni par (4).