NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

KARAGIANNIDÈS

Sur l'équilibre indifférent d'une chaîne pesante sur une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 374-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__374_0>

[R4b]

SUR L'ÉQUILIBRE INDIFFÉRENT D'UNE CHAINE PESANTE SUR UNE COURBE;

Par M. KARAGIANNIDÈS.

Considérons une courbe parfaitement polie et une chaîne homogène pesante de longueur l glissant sans frottement sur la courbe. Quelle doit être la forme de la courbe pour que la chaîne soit en équilibre dans toutes ses positions?

Il faut et il suffit pour cela que le centre de gravité de la chaîne reste à une hauteur constante, quand la chaîne glisse sur la courbe. Prenons un axe Oy vertical et appelons s l'arc de courbe; on devra avoir

$$(1) \qquad \int_s^{s+l} y\,ds = C,$$

quel que soit s. Soit, le long de la courbe,

$$y = f(s),$$

en différentiant l'équation (1), on aura

$$(2) \qquad f(s+l) - f(s) = 0.$$

La fonction $f(s)$ doit donc admettre la période l. Il y a une infinité de courbes planes et gauches répondant à la question.

Bornons-nous à des exemples simples de courbes planes dans un plan vertical.

Supposons

$$y = a \sin \frac{2\pi s}{l},$$

a constante. On en tire

$$s = \frac{l}{2\pi} \arcsin \frac{y}{a},$$

et en différentiant

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{l}{2\pi} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

$$dx^2 = dy^2 \left(\frac{l^2}{4\pi^2} \frac{1}{a^2 - y^2} - 1 \right).$$

Posons pour abréger $\frac{l}{2\pi} = b$. Nous avons

$$dx = dy \sqrt{\frac{b^2 - a^2 + y^2}{a^2 - y^2}}.$$

On a donc x en fonction de y par une intégrale elliptique.

Dans le cas particulier où $b = a$, l'intégration est immédiate; on a

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \qquad x - x_0 = -\sqrt{a^2 - y^2};$$

la courbe est un cercle de rayon a, et de circonférence

$$2\pi a = 2\pi b = l,$$

solution évidente.

Supposons maintenant a différent de b, et pour fixer les idées $a < b$. On a alors, en faisant

$$b^2 - a^2 = \alpha^2,$$

$$(c) \qquad dx = dy \sqrt{\frac{\alpha^2 + y^2}{a^2 - y^2}}, \qquad x = \int_0^y dy \sqrt{\frac{\alpha^2 + y^2}{a^2 - y^2}}.$$

Cette courbe est aisée à construire : elle n'a pas de tangente verticale, car $\frac{dx}{dy}$ ne s'annule pas ; elle a des inflexions sur Ox, comme une sinusoïde.

En intégrant par des fonctions elliptiques avec les notations de Jacobi, on obtiendra (*voyez*, par exemple, le Traité de MM. Appell et Lacour) :

$$(c)\quad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha^2 u + \mathrm{Z}(u), \\ u = \displaystyle\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(\alpha^2+y^2)(a^2-y^2)}} = \frac{1}{b}\arg\mathrm{cn}\frac{y}{a} \end{array}\right\} \left(\mathrm{mod}\ \frac{a}{b}\right),$$

$$y = a\,\mathrm{cn}\,b\,u.$$

Si a était supérieur à b, la courbe aurait des tangentes verticales et horizontales.

On pourrait prendre de même, au lieu de la solution simple

$$y = a \sin\frac{2\pi s}{l},$$

$$y = \mathrm{A}_1\cos\frac{2\pi s}{l} + \mathrm{B}_1\sin\frac{2\pi s}{l} + \mathrm{A}_2\cos\frac{4\pi s}{l} + \mathrm{B}_2\sin\frac{4\pi s}{l} - \ldots$$
$$+ \mathrm{A}_n\cos\frac{2n\pi s}{l} + \mathrm{B}_n\sin\frac{2n\pi s}{l},$$

les A et les B étant des constantes. Il serait intéressant de voir si, parmi ces courbes, il s'en trouve d'algébriques autres que le cercle.