Licence ès sciences mathématiques. Session de novembre 1896. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 176-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__176_1>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1896. — COMPOSITIONS.

Grenoble.

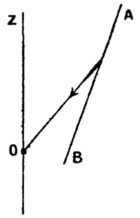
ANALYSE. — 1. *Lignes de courbure de la surface enveloppe du plan mobile défini par l'équation*

$$Z = uX + vY + a\sqrt{1 + u^2 + v^2} + b\sqrt{1 + v^2},$$

dans laquelle u et v sont deux paramètres arbitraires.

II. *Équation en coordonnées ponctuelles et définition géométrique de la surface considérée.*

MÉCANIQUE. — *Un tube rectiligne indéfini* AB, *à section infiniment petite, tourne avec une vitesse angulaire constante* ω *autour d'un axe fixe* Oz *en engen-*



drant un hyperboloïde de révolution dont O *est le centre. Un point matériel* M, *dont la masse est égale à l'unité, glisse sans frottement dans l'intérieur du tube et est attiré par le centre* O *proportionnellement à la distance, le coefficient d'attraction étant égal à* μ. *On demande le mouvement du point* M, *dont on définira la position sur* AB *par sa distance* ρ *au point où* AB *perce le cercle de gorge. On donne l'angle* α *de* AB *avec* Oz *et le rayon* a *du cercle de gorge.*

Après avoir discuté le cas général, on examinera le cas particulier suivant :

A l'instant initial, le point M *est dans le plan du cercle de gorge, avec une vitesse absolue parallèle à* Oz, *et l'on a* $\mu = \omega^2 \sin^2\alpha$. *Quelle est, dans ce cas, la projection de la trajectoire absolue de* M *sur le plan du cercle de gorge?*

ASTRONOMIE. — *Calculer l'anomalie excentrique,* *l'anomalie vraie, la longitude dans l'orbite et les longitude et latitude héliocentriques de la planète Mars, pour le 20 février 1878, à midi, temps moyen de Paris.*

Données.

Au 20 février 1878, on a

$$\Omega = 48^\circ 36' 56'', 87, \qquad e = 19241'', 8,$$
$$\omega = 333^\circ 25' 16'', 53, \qquad i = 1^\circ 51' 1'', 6,$$
$$n = 1886'', 5184;$$

et au midi, temps moyen de Paris, du 1^er^ janvier 1878, on a, pour la longitude moyenne,

$$m_0 = 66^\circ 35' 44'', 3.$$

Montpellier.

Analyse. — Première question : *Intégrer l'équation différentielle*

$$x(x+a)\left(\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y\right) - (2x+a)\left(\frac{dy}{dx} - my\right) = x^2e^{-mx}.$$

Le premier nombre s'annulant pour $y = e^{mx}$ on peut poser

$$y = e^{mx}\int z\,dx,$$

ce qui donne l'équation

$$x(x+a)\left(\frac{dz}{dx} + 2mz\right) - (2x+a)z = x^2e^{-2mx},$$

le premier membre s'annule pour $z = cx(x+a)e^{-2mx}$. En posant

$$z = ux(x+a)e^{-2mx},$$

on a

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{(x+a)^2},\qquad u=c-\frac{1}{x+a},$$

$$\begin{aligned}y&=e^{mx}\int x(cx+a-1)e^{-2mx}\,dx\\&=c'e^{mx}+c''\left(x^2+x\frac{am+1}{m}+\frac{am+1}{2m^2}\right)e^{-mx}+\frac{2mx+1}{4m^2}e^{-mx},\end{aligned}$$

Seconde question : *Calculer la différence des deux intégrales*

$$\int_0^\infty \frac{x^4+x^2(a+b)^2-a^2b^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\cos(x^2)\,dx$$
$$-\frac{ab\sqrt{2}}{a-b}\int_1^\infty\left(a\frac{a^2+x^2}{a^4+x^4}-b\frac{b^2+x^2}{b^4+x^4}\right)e^{-x^2}\,dx.$$

Formons $\int\frac{z^4+z^2(a+b)^2-a^2b^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}e^{z^2i}\,dz$ le long d'un contour composé de la partie positive de l'axe OX, d'un quart dec ercle de rayon très grand et de la bissectrice de l'angle YOX. L'intégrale totale est nulle, celle prise sur l'arc de cercle tend vers o si le rayon R devient infini, car son module est plus petit que

$$\frac{R^4+R^2(a+b)^2+a^2b^2}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-R^2\sin 2\omega}R\,d\omega$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-R^2\sin2\omega}R\,d\omega<\int_0^\theta e^{-R^2\sin2\omega}R\frac{\cos2\omega}{\cos2\theta}\,d\omega+e^{-R^2\sin2\theta}\int_\theta^{\frac{\pi}{4}}R\,d\omega$$
$$=\frac{1-e^{-R^2\sin2\theta}}{2R\cos2\theta}+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)Re^{-R^2\sin2\theta},$$

expression qui tend vers o avec $\frac{1}{R}\cdot$ On a alors

$$\int_0^\infty\frac{x^4+x^2(a+b)^2-a^2b^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}e^{x^2i}\,dx$$
$$=\int_0^\infty\frac{-x^4+x^2i(a+b)^2-a^2b^2}{(a^2+x^2i)(b^2+x^2i)}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{-x^2}\,dx$$

et, en égalant les parties réelles,

$$\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2(a+b)^2 - a^2b^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \cos(x^2)\, dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{x^8 + 2abx^6 + x^4(a^2+b^2)(a+b)^2 - 2x^2a^2b^2(a^2+ab+b^2) - a^4b^4}{(a^4+x^4)(b^4+x^4)\sqrt{2}} e^{-x^2} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx + ab\sqrt{2} \int_0^\infty \frac{x^6 - a^3b^3 + x^2(x^2 - ab)(a^2+ab+b^2)}{(a^4+x^4)(b^4+x^4)} e^{-x^2} dx,$$

équation qui peut encore s'écrire

$$\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2(a+b)^2 - a^2b^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \cos(x^2)\, dx$$
$$- \frac{ab\sqrt{2}}{a-b} \int_0^\infty \left(a\,\frac{a^2+x^2}{a^4+x^4} - b\,\frac{b^2+x^2}{b^4-x^4} \right) e^{-x^2}\, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Mécanique. — *Une barre rectiligne, infiniment mince, homogène et pesante,* AB, *est mobile dans un plan vertical fixe. Son extrémité inférieure* A *est assujettie à décrire sans frottement une barre fixe horizontale, et chacun de ses points est sollicité par une force verticale, dirigée en sens contraire de la pesanteur, égale au produit de la masse du point par la distance de celui-ci à la barre fixe.*

1° *Déterminer les positions d'équilibre de la barre.*

2° *La barre étant horizontale, on lui imprime la rotation* ω *autour du point* A, *qui est laissé immobile, de manière qu'elle se dirige au-dessus de la barre fixe, puis on l'abandonne aux forces qui la sollicitent. Étudier le mouvement de la barre et déterminer la trajectoire de l'un quelconque de ses points.*

1° Il y a équilibre lorsque les forces ont une résultante passant par A, ou lorsque la somme de leurs moments par rapport à A est nulle. Soit θ l'angle de la barre avec l'horizontale, l sa longueur, m la masse de l'unité de longueur et x la distance de l'un de ses points M à l'extrémité A. On aura l'équation

$$mgl\,\frac{l\cos\theta}{2} = \int_0^l x\sin\theta x\cos\theta m\,dx = m\sin\theta\cos\theta\,\frac{l^3}{3},$$

$$\cos\theta(2l\sin\theta - 3g) = 0\;;$$

il y a équilibre lorsque la barre est verticale ou lorsque $\sin\theta = \frac{3g}{2l}$, ce qui ne peut avoir lieu que si $l > \frac{3g}{2}$.

2° La barre est soumise à un poids $-mgl$, à une force verticale égale à

$$\int_0^l x\sin\theta m\,dx = \frac{m}{2}l^2\sin\theta,$$

et à la réaction verticale R du point A. Le centre de gravité restera sur la même verticale, et son mouvement donne l'équation

$$\frac{ml^2}{2}\frac{d^2\sin\theta}{dt^2} = \mathrm{R} - mgl + \frac{m}{2}l^2\sin\theta.$$

Pour déterminer le mouvement autour du centre de gravité, il faut calculer le moment d'inertie par rapport à ce point

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} mx^2\,dx = \frac{ml^3}{12}\;;$$

la somme des moments, par rapport au centre de gravité des forces verticales, est

$$\int_0^l mx\sin\theta\left(x - \frac{l}{2}\right)\cos\theta\,dx = m\,\frac{l^3}{12}\sin\theta\cos\theta.$$

Le mouvement autour du centre de gravité, dans le plan vertical, est donc déterminé par l'équation

$$\frac{ml^3}{12}\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{ml^3}{12}\sin\theta\cos\theta - \mathrm{R}\frac{l}{2}\cos\theta.$$

En éliminant R, on a

$$\frac{l}{12}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l}{4}\cos\theta\left[\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$
$$= -\frac{g}{2}\cos\theta + \frac{l}{3}\sin\theta\cos\theta$$

ou

$$l\cos\theta\left[\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\frac{d\theta}{dt} + \frac{l}{3}\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$
$$= \left(\frac{2}{3}l\sin 2\theta - 2g\cos\theta\right)\frac{d\theta}{dt},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{l}{4}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left(\cos 2\theta + \frac{5}{3}\right) + \frac{l}{3}\cos 2\theta + 2g\sin\theta = \frac{2}{3}l\omega^2 + \frac{l}{3},$$

le second membre étant déduit des conditions initiales

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta - \frac{3g}{l}\sin\theta + \omega^2}{1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta}}.$$

θ augmente jusqu'à $\sin\theta = \frac{3g}{2l} - \sqrt{\left(\frac{3g}{2l}\right)^2 - \omega^2}$. Mais cette valeur de θ n'est réelle que si $\omega < \frac{3g}{2l}$, et, dans le cas où $\frac{3g}{2l} > 1$, il faut, en outre, que $\omega^2 > \frac{3g}{l} - 1$. Donc $\frac{d\theta}{dt}$ peut devenir nul si $l > \frac{3g}{2}$ et $\omega < \frac{3g}{2l}$, ou si $l < \frac{3g}{2}$ et $\frac{3g}{2l} > \omega > \sqrt{\frac{3g}{l} - 1}$; la barre revient ensuite à la position horizontale par un mouvement inverse.

Si, au contraire, $\omega > \frac{3g}{2l}$, ou lorsque $l < \frac{3g}{2}$ si

$\omega < \sqrt{\frac{3g}{l} - 1}$, $\frac{d\theta}{dt}$ ne peut pas s'annuler, et θ varie de 0 à π.

La trajectoire des points de la barre s'obtient en remarquant que le milieu décrit une droite verticale, et l'extrémité A une horizontale, ce qui ramène la question à un problème classique ; les divers points décrivent des arcs d'ellipses.

Astronomie. — *Le 15 novembre 1896 l'étoile* τ *de la Couronne a pour ascension droite* $16^h 10^m 47^s,82$, *et pour déclinaison boréale* $34^\circ 7' 8'',6$. *Calculer :* 1° *les heures sidérales du lever et du coucher de cet astre à l'Observatoire de Paris, dont la latitude boréale est* $48^\circ 50' 11''$, *et l'azimut de l'étoile au moment où elle traverse le plan de l'horizon.*

Rennes.

Analyse. — Première question : *La fonction* $F(z)$, *holomorphe dans tout le plan, satisfait aux deux relations*

$$F(z+\omega) = F(z),$$

$$F(z+\omega') = e^{-\frac{k i \pi}{\omega}(2z+\omega)} F(z);$$

trouver le nombre et la somme de ses zéros, enfermés dans le parallélogramme (ω, ω') *dont le sommet initial est un point quelconque du plan.*

Seconde question : *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui admettent comme lignes de courbure les sections faites par des plans parallèles au plan* xOy.

Transformer cette équation en prenant x *comme fonction,* y *et* z *comme variables indépendantes.*

Intégrer l'une ou l'autre de ces équations.

MÉCANIQUE. — *Un cylindre elliptique, limité par deux sections droites, pesant, homogène et libre, se meut en restant constamment vertical, de manière que son axe instantané décrive uniformément sa surface et a pour lieu absolu un cylindre égal. Ces deux cylindres se touchent, au début du mouvement, par les génératrices passant aux extrémités des grands axes de leurs sections droites. Exprimer, en fonction de la distance des axes des deux cylindres et de l'angle des axes de leurs sections droites, la résultante et le couple résultant, réduit sur le centre de gravité des forces motrices capables de ce mouvement.*

Discuter les résultats obtenus.

On adoptera avec avantage, pour fixer la position de la génératrice de contact des deux cylindres, l'angle formé par le grand axe d'une section droite de l'un des cylindres avec le plan tangent commun aux deux cylindres.

On trouvera le couple moteur proportionnel à une puissance simple de la distance des axes des deux cylindres.

ASTRONOMIE. — *Calculer la distance angulaire de deux astres dont les coordonnées équatoriales sont, pour le premier astre,*

$$\mathcal{R} = 16^h\ 9^m 45^s,23, \qquad \mathcal{D} = -16^\circ\ 2'51'',2,$$

pour le second astre,

$$\mathcal{R}' = 19^h 45^m 13^s,04, \qquad \mathcal{D}' = +\ 8^\circ 34' 20'',1.$$