Nouvelles annales de mathématiques

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours général de 1888

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 231-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__231_0>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1888.

Soient C *la courbe lieu géométrique des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à une ellipse donnée* E *et* D *une droite également donnée :*

1° *Démontrer qu'il y a trois coniques tangentes à la droite* D *et touchant en* quatre *points la courbe* C. *Déterminer la nature de ces trois coniques.*

2° *Soient* α_1, α_2, α_3, α_4 *les points où la droite* D *rencontre la courbe* C; *par deux de ces points* α_1, α_2, *par exemple, on fait passer une série de cercles coupant la courbe* C *en deux nouveaux points variables* m, m' *et l'on demande de trouver la courbe enveloppe des droites* mm'.

3° *On suppose la droite* D *tangente à l'ellipse* E *et, par les points* α_1, α_2, α_3, α_4, *où cette tangente rencontre la courbe* C, *on mène à l'ellipse des tangentes autres que la tangente* D; *trouver le lieu décrit par les sommets du quadrilatère formé par ces quatre tangentes, quand la droite* D *roule sur l'ellipse* E.

On trouve sans difficulté, pour l'équation de la courbe C,

$$(\mathrm{C})\qquad (x^2+y^2-a^2-b^2)^2 = k^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

où $k^2 = \dfrac{4a^2b^2}{\tan^2\omega}$, a et b étant les axes de l'ellipse E, et ω l'angle donné.

On sait qu'une courbe ayant pour équation

$$B^2 = A,$$

où A et B sont des polynômes entiers en x et y, peut être considérée comme l'enveloppe des courbes ayant pour équation

$$\lambda^2 - 2B\lambda + A = 0,$$

où λ est un paramètre variable. La courbe C peut donc être considérée comme l'enveloppe des coniques

$$(V)\quad \lambda^2 - 2\lambda(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) + k^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0,$$

ce qui conduit, en introduisant un paramètre arbitraire, à écrire ainsi son équation :

$$(c)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - \lambda)^2 \\ &\quad = \lambda^2 - 2\lambda(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) + k^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right). \end{aligned} \right.$$

Sous cette forme, on voit que les coniques (V) sont tangentes à la courbe C en leurs *quatre* points de rencontre avec le cercle variable

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - \lambda = 0$$

concentrique à l'ellipse E.

1° Soit

$$ux + vy = 1$$

l'équation de la droite D. Formons l'équation du faisceau des droites qui vont de l'origine aux points de rencontre de la droite D avec l'une des coniques (V) :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &[\lambda^2 + 2\lambda(a^2 + b^2) - k^2](ux + vy)^2 \\ &\quad - 2\lambda(x^2 + y^2) + k^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

et écrivons que ce faisceau est composé d'un rayon double :

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &[\lambda^2 + 2\lambda(a^2 + b^2) - k^2] \\ &\quad \times \left[u^2\left(\frac{k^2}{b^2} - 2\lambda\right) + v^2\left(\frac{k^2}{a^2} - 2\lambda\right)\right] + \left(\frac{k^2}{a^2} - 2\lambda\right)\left(\frac{k^2}{b^2} - 2\lambda\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation précédente détermine les valeurs de λ pour lesquelles la conique (V) correspondante est tangente à la droite D; or cette équation est du troisième degré :

elle fait donc connaître trois coniques tangentes à cette droite et touchant en *quatre* points la courbe C.

La nature d'une conique (V) dépendant du signe de l'expression

$$\left(\frac{k^2}{a^2}-2\lambda\right)\left(\frac{k^2}{b^2}-2\lambda\right),$$

on est conduit à substituer à λ, dans l'équation (2), les valeurs

$$-\infty, \qquad 0, \qquad \frac{k^2}{2a^2}, \ \frac{k^2}{2b^2}, \quad +\infty,$$

qui fournissent les résultats suivants :

$$+, \quad 1-a^2u^2-b^2v^2, \quad +, \quad -, \quad -.$$

Si la droite D coupe l'ellipse E en deux points réels, l'expression $1-a^2u^2-b^2v^2$ est négative ; l'équation (2) a trois racines réelles et distinctes et les trois coniques sont deux ellipses et une hyperbole. Les deux ellipses seront réelles si les valeurs de λ correspondantes rendent négative l'expression

$$\lambda^2+2\lambda(a^2+b^2)-k^2,$$

et c'est ce qui résulte de ce qu'elles sont racines de l'équation (2) et rendent positives les deux expressions

$$u^2\left(\frac{k^2}{b^2}-2\lambda\right)+v^2\left(\frac{k^2}{a^2}-2\lambda\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{k^2}{a^2}-2\lambda\right)\left(\frac{k^2}{b^2}-2\lambda\right).$$

Si la droite D est tangente à l'ellipse E, l'expression $1-a^2u^2-b^2v^2$ est nulle ; l'équation (2) a une racine nulle et ses deux autres racines sont celles de l'équation

$$\lambda^2+\frac{4a^2v^2+4b^2u^2-\dfrac{k^2}{a^2b^2}}{2(u^2+v^2)}\lambda-k^2=0.$$

Cette équation ayant une racine négative, on en conclut que c'est la racine positive de l'équation (2), inférieure à $\frac{k^2}{2a^2}$, qui est devenue nulle.

La droite D devenant extérieure à l'ellipse E, l'expression $1 - a^2u^2 - b^2v^2$ devient positive et la racine nulle de l'équation (2) devient négative. Les trois coniques sont toujours deux ellipses réelles et une hyperbole.

Enfin, si les deux racines négatives se rejoignent, puis deviennent imaginaires, les ellipses correspondantes se confondent, puis deviennent imaginaires. La troisième conique est toujours une hyperbole.

2° Le premier membre de l'équation (1), lorsqu'on y remplace λ par une racine λ' de l'équation (2), devient le carré parfait d'une certaine fonction linéaire $u'x + v'y$, de sorte qu'on a identiquement

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &[\lambda'^2 + 2\lambda'(a^2+b^2) - k^2](ux+vy)^2 \\ &\qquad - 2\lambda'(x^2+y^2) + k^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = (u'x+v'y)^2. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons, dans l'équation (c), le paramètre arbitraire λ par λ', puis, dans le second membre, substituons à $-2\lambda'(x^2+y^2) + k^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ sa valeur tirée de cette identité, l'équation de la courbe C deviendra

$$(\mathrm{C})'\quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda')^2 \\ &\quad = (u'x+v'y)^2 - [\lambda'^2 + 2\lambda'(a^2+b^2) - k^2][(ux+vy)^2 - 1]. \end{aligned} \right.$$

Les points de rencontre de la droite D et de la courbe C sont donc les points de rencontre de la droite D et de la courbe

$$(x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda')^2 = (u'x+v'y)^2,$$

qui se compose de deux cercles

$$(4)\qquad x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda' - (u'x+v'y) = 0,$$

$$(5)\qquad x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda' + (u'x+v'y) = 0.$$

Un cercle quelconque passant par les points de rencontre α_1 et α_2 de la droite D et du premier cercle a pour équation

$$x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda' - (u'x+v'y) - \mu(ux+vy-1) = 0,$$

μ désignant un paramètre arbitraire.

Les points de rencontre de ce cercle et de la courbe (C)' sont les points de rencontre de ce cercle et de la courbe

$$\begin{aligned}&[(u'x+v'y)+\mu(ux+vy-1)]^2\\&\quad=(u'x+v'y)^2-[\lambda'^2+2\lambda'(a^2+b^2)-k^2][(ux+vy)^2-1],\end{aligned}$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned}&\mu^2(ux+vy-1)^2+2\mu(ux+vy-1)(u'x+v'y)\\&\qquad+[\lambda'^2+\lambda'(a^2+b^2)-k^2][(ux+vy)^2-1]=0,\end{aligned}$$

qui se compose des deux droites

$$ux+vy-1=0,$$

$$\begin{aligned}&\mu^2(ux+vy-1)+2\mu(u'x+v'y)\\&\qquad+[\lambda'^2+2\lambda'(a^2+b^2)-k^2](ux+vy+1)=0.\end{aligned}$$

La première est la droite D; la seconde est donc la droite mm', dont on a immédiatement l'enveloppe

$$(u'x+v'y)^2-[\lambda'^2+2\lambda'(a^2+b^2)-k^2][(ux+vy)^2-1]=0,$$

ou, eu égard à l'identité (3),

$$(\mathrm{V})'\quad \lambda'^2+2\lambda'(x^2+y^2+a^2-b^2)+k^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0.$$

Cette enveloppe est donc celle des trois coniques (V) tangentes à la courbe C et à la droite D qui correspond à la racine λ' choisie. Si, aux cercles (4) qui passent par α_1 et α_2, on substitue les cercles (5) qui passent par α_3 et α_4, l'enveloppe des nouvelles droites mm' est la même conique (V)$'$.

Les quatre points de rencontre α_1, α_2, α_3, α_4 de la droite D et de la courbe C sont susceptibles de trois groupements deux à deux, et ces trois groupements correspondent aux trois racines de l'équation (2).

3° Supposons la droite D tangente à l'ellipse E. Les points α_1, α_2, α_3, α_4 s'obtiendront en menant à l'ellipse deux tangentes parallèles inclinées dans un sens de l'angle ω sur la droite D, et deux autres tangentes parallèles inclinées du même angle en sens contraire. Le quadrilatère formé par ces quatre tangentes sera un parallélogramme, et, de deux de ses sommets, on verra l'ellipse sous un angle 2ω, des deux autres, sous l'angle supplémentaire. L'équation du lieu cherché est donc

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2=k'^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

où $k'^2=\frac{4a^2b^2}{\tan g^2 2\omega}$. Ch. B.