BALITRAND

Sur l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 45-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__45_0>

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$;

PAR M. BALITRAND,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

M. Victor de Strékalof a donné (3e série, t. V, p. 533) une méthode qui permet de trouver simplement et brièvement l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$. Nous nous proposons, dans cette petite Note, d'appliquer ce procédé à la recherche de l'intégrale plus générale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$. Nous adopterons les notations de M. Victor de Strékalof et nous poserons avec lui

$$z = \operatorname{tang}\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad dz = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

On a

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} &= \int (\cos^2\varphi)^n\, d(\operatorname{tang}\varphi)\\ &= \operatorname{tang}\varphi \cos^{2n}\varphi - \int \operatorname{tang}\varphi\, d(\cos^{2n}\varphi).\end{aligned}$$

Nous sommes donc ramené à la recherche de l'intégrale $\int \operatorname{tang}\varphi\, d(\cos^{2n}\varphi)$. Calculons la différentielle de $\cos^{2n}\varphi$:

$$\begin{aligned}d(\cos^{2n}\varphi) &= -2n\cos^{2n-1}\varphi \sin\varphi\, d\varphi\\ &= -2n\cos^{2n-1}\varphi\cos\varphi \operatorname{tang}\varphi\, d\varphi;\end{aligned}$$

donc

$$\int \operatorname{tang}\varphi\, d(\cos^{2n}\varphi) = -2n\int \operatorname{tang}^2\varphi \cos^{2n}\varphi\, d\varphi,$$

ce qui peut s'écrire

$$-2n\int(1+\operatorname{tang}^2\varphi-1)\cos^{2n}\varphi\,d\varphi$$
$$=-2n\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi+2n\int\cos^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

On voit donc que l'on obtient l'égalité

$$\int\cos^{2n}\varphi\,d(\operatorname{tang}\varphi)$$
$$=\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi$$
$$=\operatorname{tang}\varphi\cos^{2n}\varphi+2n\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi-2n\int\cos^{2n}\varphi\,d\varphi$$

ou bien

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}\int\cos^{2n}\varphi\,d\varphi&=\frac{1}{2n}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2n}\varphi\\&\quad+\frac{2n-1}{2n}\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi.\end{aligned}\right.$$

Cette égalité ramène la recherche de l'intégrale $\int\cos^{2n}\varphi\,d\varphi$ à celle de l'intégrale $\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi$. Dans l'égalité (1), donnons à n les valeurs successives

$$n,\quad n-1,\quad n-2,\quad \ldots,\quad 2,\quad 1;$$

nous obtenons

$$\int\cos^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2n}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2n}\varphi+\frac{2n-1}{2n}\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi,$$
$$\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2(n-1)}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2(n-1)}\varphi+\frac{2n-3}{2(n-1)}\int\cos^{2(n-2)}\varphi\,d\varphi,$$
$$\int\cos^{2(n-2)}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2(n-2)}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2(n-2)}\varphi+\frac{2n-5}{2(n-2)}\int\cos^{2(n-3)}\varphi\,d\varphi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\begin{aligned}\int\cos^{2(n-p+1)}\varphi\,d\varphi&=\frac{1}{2(n-p+1)}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2(n-p+1)}\varphi\\&\quad+\frac{2n-2p+1}{2(n-p+1)}\int\cos^{2(n-p)}\varphi\,d\varphi,\end{aligned}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\varphi\cos^2\varphi+\frac{1}{2}\varphi.$$

De cette série d'égalités, on déduit facilement

$$\int \cos^{2n}\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2n} \operatorname{tang}\varphi \cos^{2n}\varphi + \frac{1}{2(n-1)} \frac{2n-1}{2n} \operatorname{tang}\varphi \cos^{2(n-1)}\varphi$$

$$+ \frac{1}{2(n-2)} \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n.2(n-1)} \operatorname{tang}\varphi \cos^{2(n-2)}\varphi + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2(n-p)} \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}{2n.2(n-1)\ldots 2(n-p+1)} \operatorname{tang}\varphi \cos^{2(n-p+1)}\varphi + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n.2(n-1)\ldots 4.2} \operatorname{tang}\varphi \cos^2\varphi$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n.2(n-1)\ldots 4.2} \varphi + \text{const.}$$

On trouve finalement, en remplaçant $\cos^2\varphi$ et $\operatorname{tang}\varphi$ par leurs valeurs,

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2n} \frac{z}{(1+z^2)^n} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{2n-1}{2n} \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2(n-p)} \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}{2n.2(n-1)\ldots 2(n-p+1)} \frac{z}{(1+z^2)^{n-p+1}} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n.2(n-1)\ldots 4.2} \frac{z}{1+z^2}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n.2(n-1)\ldots 4.2} \operatorname{arc\,tang} z + \text{const.}$$