J.-E. ESTIENNE

Quelques réflexions sur l'étude géométrique des courbes géométriques et théorèmes pouvant y être utiles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 87-98

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__87_1>

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES GÉOMÉTRIQUES ET THÉORÈMES POUVANT Y ÊTRE UTILES;

PAR M. J.-E. ESTIENNE.

On connaît sur les courbes géométriques plusieurs théorèmes généraux. Un des plus remarquables, dû à Euler, est le suivant :

THÉORÈME I. — *Toute courbe d'ordre n, qui passe par $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ points fixes, passe par $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres points fixes.*

Ce théorème énonce une propriété intime et caractéristique des courbes géométriques, qui peut servir au géomètre de point de départ dans l'étude de ces courbes.

Les courbes gèométriques sont définies analytiquement par ce fait que leur équation cartésienne est algébrique. Cette définition suffit à l'analyste, mais non au géomètre, qui, n'usant pas de coordonnées, a besoin, pour étudier une courbe, d'en avoir une définition purement géométrique.

On n'entend pas par là critiquer l'admirable classification des courbes, en ordres, introduite par Descartes; on veut dire simplement que, pour les étudier, il faut que le géomètre parte de leur définition algébrique, en la traduisant dans son langage par un théorème géométrique.

De l'équation d'une courbe d'ordre n, on déduit, par exemple, qu'une droite quelconque coupe cette courbe en n points. Voilà une propriété que le géomètre pourrait songer à prendre comme définition de la courbe d'ordre n. La tentative, faite je crois plusieurs fois, n'a pas réussi.

Cette simple propriété ne suffit pas à la Géométrie; elle a besoin, pour pouvoir progresser avec ses seules ressources, des renseignements plus complets de l'Analyse.

On lui empruntera les suivants :

1° *Une courbe d'ordre n est définie par* $\frac{n(n-3)}{2}$ *de ses points;*

2° *Deux courbes d'ordre n et p se coupent en np points;*

3° Le théorème I, énoncé plus haut.

Ces notions suffisent à établir le théorème de Pascal, et, par suite, à faire l'étude des coniques.

Un très bon énoncé du théorème de Pascal est en effet celui-ci :

Si six points sont sur une conique, deux cubiques quelconques, passant par ces six points, se coupent en trois autres points qui sont en ligne droite.

Ce théorème est facile à déduire du théorème I, appliqué aux cubiques ($n = 3$).

On a le théorème de Pascal sous sa forme ordinaire en considérant les côtés non consécutifs d'un hexagone inscrit à une conique, comme constituant une cubique.

Cette relation géométrique entre six points d'une conique remplace parfaitement, pour le géomètre, l'équation de cette courbe. Il peut, à la rigueur, faire une étude complète des coniques par les procédés qui lui sont propres, sans avoir recours à l'équation du second ordre. Il est débarrassé de la tutelle de l'Algèbre.

Pour étudier une courbe géométrique d'ordre n que $\frac{n(n+3)}{2}$ points définissent, il faudrait une relation analogue entre $\frac{n(n+3)}{2} + 1$ points *quelconques* de cette courbe. Il faudrait savoir, dans le cas des cubiques, par exemple, comment sont liés dix quelconques de leurs points.

Ici, le théorème I, d'où l'on a déduit le théorème de Pascal, est impuissant. Il donne bien une relation entre treize points d'une cubique, à savoir que deux quartiques passant par ces treize points se coupent en trois autres points, qui sont en ligne droite; mais cela est sans grande utilité et ne répond d'ailleurs pas à la question.

Nous aurons recours à un autre théorème général, que nous croyons nouveau.

On est conduit à souçonner ce théorème, si l'on remarque l'identité suivante :

$$\left[\frac{(n-1)(n-1+3)}{2} + 1\right] + \left[\frac{(n-2)(n-2+3)}{2} + 1\right] = n^2$$

que nous exprimerons ainsi en langage ordinaire :

Le nombre des points, augmenté de un, nécessaire à la détermination d'une courbe d'ordre $n - 1$, ajouté au nombre des points augmenté de un, nécessaires à la détermination d'une courbe d'ordre $n - 2$, est égal au nombre des points d'intersection de deux courbes d'ordre n.

Or on sait que les n^2 points d'intersection de deux courbes d'ordre n ne sont pas quelconques; si un certain nombre d'entre eux $\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}+1$ sont sur une courbe d'ordre $n - 1$, ils satisfont à une relation différente de celle qui lie les n^2 points, mais qui peut se combiner avec elle, de telle sorte que les points restants satisfassent à une nouvelle relation; comme leur nombre surpasse de un le nombre des points nécessaires à la détermination d'une courbe d'ordre $n - 2$, il vient tout d'abord à l'esprit qu'ils sont sur une courbe d'ordre $n - 2$; c'est, en effet, ce qui a lieu, comme on le verra plus loin.

Qu'on excuse ces raisonnements par à peu près; on les a écrits parce qu'ils constituent presque une méthode pour l'étude des questions analogues à celles qui sont traitées dans ce modeste travail : ils permettent de voir s'il y a un théorème, et en quoi il peut consister. Ce n'est d'ailleurs pas une innovation; il y a longtemps que Lagrange disait que les découvertes en Mathématiques se font par l'appréciation du degré de détermination de la quantité.

Démontrons maintenant le théorème :

Théorème II. — *Si des n^2 points d'intersection de deux courbes d'ordre n, $\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}+1$ sont sur* *une courbe d'ordre n — 1, les* $\frac{(n-2)(n-2+3)}{2}+1$ *autres sont sur une courbe d'ordre n — 2, et inversement.*

On démontre ce théorème en appliquant le théorème I à une courbe d'ordre $2n-3$.

Distinguons, dans les n^2 points d'intersection des deux courbes d'ordre n, deux groupes a et b; le groupe a comprenant les $\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}+1$ points qui sont sur une courbe d'ordre $n-1$ et le groupe b, tous les autres, qu'on veut prouver être sur une courbe d'ordre $n-2$.

La courbe $n-1$ coupe chacune des courbes n en $n(n-1)$ points dont

$$n(n-1)-\left[\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}+1\right]=\frac{(n-3)n}{2}$$

nouveaux.

Par ces $\frac{(n-3)n}{2}$ points, faisons passer la courbe d'ordre $n-3$ qu'ils déterminent.

Nous avons, dans le plan, un nombre de points $n^2+(n-3)n$ ou $n(2n-3)$; en isolant un point du groupe b, il reste $n(2n-3)-1$ ou

$$\frac{(2n-3)(2n-3+3)}{2}-1 \text{ points},$$

et toutes les courbes d'ordre $2n-3$ qui passent par ces points passent, d'après le théorème I, par $(n-2)(2n-5)$ autres points fixes.

Or l'une des courbes d'ordre n et la courbe d'ordre $n-3$, déterminée par les points nouveaux situés sur l'autre courbe d'ordre n, constituent une courbe d'ordre $2n-3$; la combinaison des deux autres courbes d'ordre n et $n-3$ constitue encore une courbe d'ordre $2n-3$; le point isolé fait partie de l'intersection de ces deux systèmes; donc, toute courbe d'ordre $2n-3$, passant par les $n(2n-3)-1$ points du plan, autres que ce point isolé, passe par ce point isolé; en particulier, la courbe d'ordre $2n-3$, constituée par la courbe d'ordre $n-1$ passant par les points du groupe a et par la courbe d'ordre $n-2$ qu'on peut faire passer par les points du groupe b moins le point isolé, ce qui exige que la courbe b passe par ce point isolé. C. Q. F. D.

On peut ajouter que la courbe b passe par les points nouveaux d'intersection des courbes $n-3$ avec les courbes n.

Ce théorème général, appliqué aux cubiques, donne, au moyen des courbes *connues* du second ordre, une relation entre dix points d'une cubique :

Théorème. — *Si, par dix points d'une cubique, on fait passer deux courbes du quatrième ordre (deux groupes de deux coniques, en particulier), elles se coupent en six nouveaux points qui sont sur une conique* C.

De plus, la droite, qui joint les deux autres points α, β d'intersection d'une des quartiques avec la cubique coupe cette quartique en deux autres points p, q, qui sont également sur la conique C.

On reviendra plus loin sur cet important théorème.

Le théorème II s'applique encore, si l'une des courbes d'ordre n comprend un certain nombre de droites; le degré de la courbe, sur laquelle se trouvent les points d'intersection restants, s'abaisse d'autant. On a, par exemple, ce théorème :

Théorème. — *Si, des vingt points d'intersection d'une courbe du quatrième ordre avec une courbe du cinquième ordre, dix sont sur une cubique, les dix autres sont aussi sur une cubique.*

On peut déduire de là des propositions plus ou moins intéressantes, celle-ci par exemple :

Théorème. — *Si les côtés d'un pentagone touchent une cubique aux points* 1, 2, 3, 4, 5, *ils en touchent une autre aux points* 1', 2', 3', 4', 5', *où ils sont coupés par la conique passant par les points* 1, 2, 3, 4, 5.

On le démontre en appliquant le théorème précédent à la courbe du cinquième ordre formée par les côtés du pentagone et à la quartique formée par la conique doublée.

Pour démontrer le théorème général II, applicable à une courbe d'ordre n, on a eu recours à une propriété d'une courbe de degré plus élevé, $2n - 3$, qui ne figure ni dans l'énoncé, ni dans les constructions. Cette méthode se prête bien à la recherche et à la démonstration des propriétés des courbes d'ordre supérieur au second, ou des systèmes de coniques.

C'est ainsi qu'on démontre facilement les théorèmes suivants, sortes de porismes, que l'Analyse aurait parfois de la peine à atteindre.

Lemme. — *Si, par les neuf points d'intersection de deux cubiques, on fait passer une courbe* A *du quatrième degré, ses trois nouveaux points d'intersection* a, b, c *avec l'une des cubiques* B *sont en ligne droite.*

Car une droite D quelconque coupant A aux points α, β, γ, δ et la cubique B constituent une courbe du quatrième ordre, qui coupe la courbe A en α, β, γ, δ, a, b, c et en les neuf points donnés.

Par ces neuf points et le point α par exemple, on peut faire passer une cubique; les six points restants (β, γ, δ, a, b, c) sont donc sur une conique (théorème II); comme β, γ, δ sont sur une droite, a, b, c sont aussi sur une droite.

Remarque. — Ce lemme s'exprimerait analytiquement en disant :

« L'équation générale des quartiques passant par les points d'intersection de deux cubiques B et B' est

$$BD + B'D' = 0,$$

D et D' étant des droites. »

Théorème. — *Si, par sept points pris sur une cubique fixe* A, *on fait passer une cubique* B, *elle coupe* A *en deux nouveaux points; la droite* D *qui les joint coupe* A *en un point fixe.*

Soit D' la droite qui joint les points nouveaux d'intersection d'une cubique passant par les sept points, avec la cubique A ; cette droite D' et la cubique B constituent une quartique, et l'on voit, en appliquant le lemme, que l'intersection de D' et de A est sur D.

Remarque. — Ce théorème donne une construction du neuvième point commun aux cubiques passant par huit points, quand trois de ces huit points sont sur une droite, ou six sur une conique.

Théorème analogue. — *Si, par quatre points pris sur une cubique fixe* A, *on fait passer une cubique* B, *elle coupe* A *en cinq nouveaux points; la conique qu'ils déterminent coupe* A *en un point fixe.*

Ce théorème se démontrerait comme le précédent, en invoquant le lemme suivant, facile à démontrer au moyen du théorème II.

Lemme. — *Une courbe du cinquième ordre qui passe par l'intersection de deux cubiques coupe l'une d'elles en six nouveaux points, situés sur une conique.*

On démontrerait de même, en s'appuyant sur un lemme analogue aux précédents, le théorème suivant :

Théorème. — *Si, par onze points de la courbe fixe du quatrième ordre* A, *on fait passer une courbe va-*

riable du quatrième ordre B, *elle coupe* A *en cinq nouveaux points, la conique qui passe par ces cinq points passe par trois points fixes de* A, *quand* B *varie.*

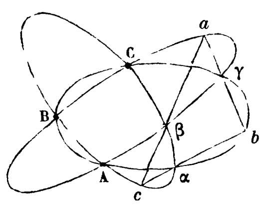
Tous ces théorèmes procèdent évidemment d'un théorème général; mais il est d'un énoncé trop complexe pour être intéressant.

Appliquons la méthode à la démonstration d'une propriété d'un système de coniques :

THÉORÈME. — *Si trois coniques a, b, c sont circonscrites à un triangle* ABC, *on peut, par les points α, β, γ, où elles se coupent deux à deux, faire passer les côtés d'une infinité de triangles, dont les sommets a, b, c sont sur chacune des coniques* (*fig.* 1).

Considérons, en effet, les huit points A, B, C, α, β, γ et a, c, ces deux derniers points étant à l'intersection d'une droite quelconque passant par β et de chacune des

Fig. 1.



coniques a et c. Toutes les cubiques passant par ces huit points passent par un neuvième; donc les trois cubiques que constituent les trois groupes de droites et de coniques :

La conique	a	et la droite	$c\alpha$,
»	b	»	ca,
»	c	»	$a\gamma$

passent par un même point b, et le théorème est démontré.

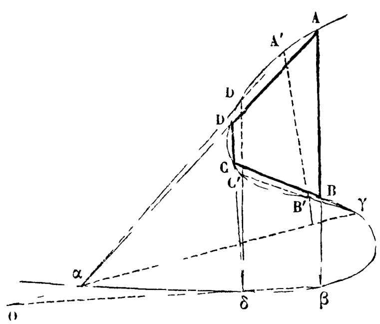
On démontrera encore par la considération du neuvième point le théorème, assez intéressant, qui suit :

Théorème. — *Si l'on peut inscrire à une cubique un quadrilatère* ABCD *dont les côtés passent par quatre points* α, β, γ, δ *donnés sur cette cubique, on en peut inscrire une infinité* (*fig.* 2).

Menons, en effet, par α une droite quelconque, coupant la cubique en A' et D'; menons les droites $A'\beta$ et $D'\delta$ qui coupent la cubique, respectivement en B' et C'; il faut démontrer que les points B', C', γ sont en ligne droite.

Or le point O, intersection des droites $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, est sur la cubique donnée, puisqu'il est le neuvième point

Fig. 2.



commun à toutes les cubiques passant par les huit points A, B, C, D, α, β, γ, δ. Donc les neuf points A', B', C', D', α, β, γ, δ, O sont à l'intersection de deux cubiques : la cubique donnée et le système des trois droites $A'B'$, $\alpha\gamma$, $C'D'$. Comme six de ces points sont sur la conique formée par les deux droites $A'D'$, $\beta\delta$, les trois autres B', γ, C' sont en ligne droite.

REMARQUES SUR LES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS.

Le petit nombre de théorèmes qu'on vient de démontrer donne une idée du parti qu'on peut tirer du théorème général II dans l'étude géométrique des courbes géométriques.

Au point de vue spécial de la théorie des cubiques, ce théorème général donne une relation, analogue à celle de Pascal pour les coniques, entre dix points d'une cubique, à savoir que : *Deux groupes de deux coniques passant par dix points d'une cubique se coupent en six nouveaux points qui sont sur une conique.*

Ce théorème permet d'aborder la solution graphique des problèmes suivants et de leurs analogues :

Trouver l'intersection d'une cubique passant par neuf points donnés :

1° *Avec une droite passant par un ou deux de ces neuf points;*

2° *Avec une conique passant par quatre ou cinq de ces neuf points;*

3° *Avec une cubique passant par sept de ces points.*

Mener la tangente en un point d'une cubique définie par ce point et huit autres.

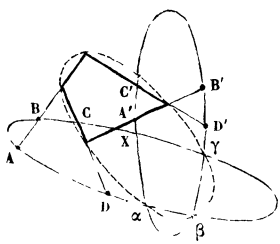
Trouver le neuvième point commun à toutes les cubiques passant par huit points donnés.

On ne veut pas dire que la solution de ces problèmes se trouve immédiatement, ni même qu'elle soit facile; mais, comme cette solution est ramenée à la recherche de certaines coniques, on est affranchi de toute considération sur les cubiques, et l'on n'a à opérer que sur des courbes du second ordre, déjà connues.

C'est ainsi, par exemple, que la recherche du neuvième point X commun à toutes les cubiques qui passent par huit points A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ se ramène à ceci (*fig.* 3) :

Trouver un point X *tel que les deux coniques se coupant en ce point et passant l'une par* A, B, C, D *et l'autre par* A′, B′, C′, D′ *se coupent en trois autres points* α, β, γ *qui soient sur une conique passant par les quatre intersections des droites* AB, CD *avec les droites* A′B′, C′D′; *ou, plus généralement, qui soient sur une conique*

Fig. 3.



passant par les quatre points d'intersection de deux coniques quelconques dont l'une est circonscrite au quadrilatère ABCD *et l'autre au quadrilatère* A′B′C′D′.

Il suffit, en effet, de se reporter au théorème général sur les cubiques, pour voir que l'un quelconque de ces quatre points d'intersection, le point X et les huit points donnés sont dix points d'une même cubique.

(*A suivre.*)