PETICOL

Loi de probabilité des écarts

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 441-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__441_0>

LOI DE PROBABILITÉ DES ÉCARTS;

PAR M. PETICOL,
Capitaine d'Artillerie de Marine.

Nous étudions cette loi pour des expériences d'un genre particulier, pour lesquelles la probabilité de chaque écart peut être facilement calculée, sans que l'on ait besoin de recourir à aucune loi préconçue, ni à aucune hypothèse; puis, cette loi une fois trouvée, pour ce cas particulier, nous l'appliquons par analogie à toutes les expériences.

Voici en quoi consiste cette expérience : nous jetons en l'air m pièces de monnaie (pour cette théorie, il faut supposer m pair), et nous comptons à terre le nombre de piles et le nombre de faces.

L'expérience type est celle qui donnera autant de piles que de faces; quand l'expérience donnera n piles et $m-n$ faces, elle présentera un écart égal à $\frac{m}{2}-n$: ainsi, si l'on jette dix pièces en l'air et que l'on tourne trois piles et sept faces, l'écart de cette expérience est deux. Le plus grand écart que l'on puisse rencontrer est $\frac{m}{2}$: il a lieu quand on tourne tout pile ou tout face.

Voyons maintenant la probabilité de tourner n piles et $m-n$ faces. La probabilité d'obtenir une combinaison déterminée des n pièces supposées numérotées $1, 2, 3, \ldots, m$, telle, par exemple, que la première pièce soit une face, la deuxième une pile, la troisième une pile, etc., est évidemment $\frac{1}{2^m}\cdot$

D'autre part, le nombre des combinaisons que l'on peut former avec m pièces, en en tournant n piles et $m-n$ faces, est

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n};$$

car ce nombre est égal au nombre des combinaisons de m lettres n à n.

Par suite, la probabilité P_n de tourner n piles et $m-n$ faces dans une expérience est

$$\frac{1}{2^m}\times\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}=P_n.$$

Cas particuliers. — Pour avoir la probabilité de tourner autant de piles que de faces, il faut, dans cette formule, faire $n=\frac{m}{2}$, ce qui donne

$$P_{\frac{m}{2}}=\frac{1}{2^m}\,\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}}.$$

La probabilité de tourner m piles et 0 face est $\frac{1}{2^m}\cdot$

En résumé, les probabilités de tourner m piles et 0 face, $m-1$ piles et 1 face, etc., jusqu'à 1 pile et $m-1$ faces, et 0 pile et m faces, sont données par les fractions

$$\frac{1}{2^m},\quad \frac{1}{2^m}\,\frac{m}{1},\quad \frac{1}{2^m}\,\frac{m(m-1)}{1.2},\quad \ldots,$$

$$\frac{1}{2^m}\,\frac{m(m-1)\ldots.\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}},\quad \ldots,\quad \frac{1}{2^m}\,\frac{m}{1},\quad \frac{1}{2^m}.$$

On reconnait là les coefficients du binôme multipliés par $\frac{1}{2^m}\cdot$ On vérifie que la somme de toutes ces probabilités est égale à 1, car on a

$$2^m = (1+1)^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots + \frac{m}{1} + 1$$

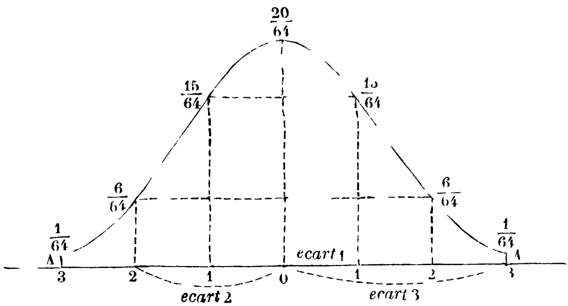
et, en divisant par 2^m,

$$1 = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}\frac{m}{1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\frac{m}{1} + \frac{1}{2^m}.$$

Applications. — Appliquons ces formules au cas où $m = 6$. Les sept combinaisons possibles sont

	6 piles	5 piles	4 piles	3 piles	2 piles	1 pile	0 pile
Étant les probabilités...	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$.

Sur une droite horizontale, à droite et à gauche d'un point O, pris comme origine, portons successivement trois longueurs égales représentant l'écart 1 : en chacun de ces sept points, élevons des ordonnées proportionnelles aux probabilités, et joignons tous les sommets des ordonnées par un trait continu : nous obtiendrons la courbe ci-après.



Telle est la représentation graphique de la loi des écarts pour $m = 6$.

Ecart moyen. — Pour avoir l'écart moyen dans l'exemple précédent, on multipliera chaque écart par sa probabilité, et l'on fera la somme de tous ces produits; ainsi l'écart 3, correspondant aux six piles, sera multiplié par $\frac{1}{64}$; l'écart 2 par $\frac{6}{64}$, ... Il y a un autre écart 3, correspondant aux six faces et 0 pile, etc., en sorte que l'écart moyen, dans ce cas, est égal à

$$\frac{6}{64}+\frac{24}{64}+\frac{30}{64}=\frac{60}{64}=\frac{15}{16}.$$

Nous allons traiter la même question pour m quelconque; pour cela, il faut multiplier tous les écarts par leur probabilité respective, et faire la somme de tous ces produits. Observons que, chaque écart se reproduisant deux fois avec la même probabilité, suivant que c'est le nombre des faces qui surpasse celui des piles ou inversement, il revient au même de ne le prendre qu'une fois et de doubler la fraction qui représente sa probabilité.

		Probabilité.
L'écart extrême est.	$\frac{m}{2}$	$\frac{2}{2^m}$
Ensuite vient l'écart.	$\frac{m}{2}-1$	$\frac{2}{2^m}\,\frac{m}{1}$
Puis	$\frac{m}{2}-2$	$\frac{2}{2^m}\,\frac{m(m-1)}{1.2}$
Puis	$\frac{m}{2}-3$	$\frac{2}{2^m}\,\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$
....		....
Puis	2	$\frac{2}{2^m}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+3\right)}{1.2\ldots\left(\frac{m}{2}-2\right)}$
Et enfin	1	$\frac{2}{2^m}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+2\right)}{1.2\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}.$

L'écart moyen est donc égal au produit

$$\frac{2}{2^m}\left[\frac{m}{2}+\frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{m}{2}-2\right)+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+2\right)}{1.2\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}\,1\right].$$

Faisons la somme des quantités entre parenthèses : Additionnons d'abord les deux premiers termes

$$\frac{m}{2}+\frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)=\frac{m(m-1)}{2.1}.$$

Ajoutons le troisième à ce premier total

$$\frac{m(m-1)}{2.1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{m}{2}-2\right)=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.1.2}.$$

Faisons de même pour le quatrième

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{m}{2}-3\right)$$
$$=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.1.2.3}.$$

En continuant ainsi de suite, on trouvera, pour la somme des quantités entre parenthèses, la fraction

$$\frac{m}{2}\,\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}.$$

Par suite, l'écart moyen γ_m est égal à (l'indice m est mis pour indiquer qu'il s'agit d'une expérience avec m pièces)

$$\frac{m}{2^m}\,\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}.$$

L'expression de l'écart moyen peut se mettre sous une autre forme. Changeons, dans la formule qui donne γ_m, m en $m+2$. Nous aurons

$$\gamma_{m+2} = \frac{m+2}{2^{m+2}} \frac{m+1}{1} \frac{m}{2} \frac{m-1}{3} \cdots \frac{\frac{m}{2}+2}{\frac{m}{2}}.$$

Par suite,

$$\frac{\gamma_{m+2}}{\gamma_m} = \frac{(m+2)(m+1)}{2^2 \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{m+1}{m}.$$

Or $\gamma_2 = \frac{1}{2}$; par suite,

$$\gamma_4 = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{2}; \quad \gamma_6 = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{5}{4}; \quad \gamma_8 = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{5}{4} \times \tfrac{7}{6}.$$

Enfin

$$\gamma_m = \frac{1}{2} \frac{3.5.7\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots(m-2)}.$$

Quand m augmente indéfiniment, γ_m tend vers ∞ ; en effet, on peut écrire

$$\gamma_m = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m-2}\right).$$

En effectuant les multiplications, on voit que l'on a

$$\gamma_m > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{m-2}\right).$$

La somme des termes entre parenthèses augmente indéfiniment avec m; donc γ_m est infini pour $m=\infty$. Mais, quand m tend vers ∞, il en est de même de l'écart extrême $\frac{m}{2}$. Ainsi, quand on ne fixe pas de limite à l'écart extrême $\frac{m}{2}$ et qu'on admet qu'il peut devenir infiniment grand, bien qu'ayant une probabilité infiniment petite $\frac{2}{2^m}$, l'écart moyen n'a pas non plus de limite et tend vers l'infini. Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*.

Quand on fait varier le nombre m des pièces de monnaie, le rapport de l'écart moyen à l'écart extrême, que nous appellerons K_m, varie également. On a

$$K_m = \frac{\gamma_m}{\frac{m}{2}} = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m};$$

ainsi

$$K_2 = \tfrac{1}{2},\quad K_4 = \tfrac{3}{8},\quad K_6 = \tfrac{5}{16},\quad K_8 = \tfrac{35}{128},\quad \ldots.$$

On peut remarquer que K_m est égal à $P_{\frac{m}{2}}$, c'est-à-dire à la probabilité de tourner autant de piles que de faces. K_m varie de $\frac{1}{2}$ à 0, quand m varie de 2 à ∞.

Considérons maintenant les écarts qui se produisent dans d'autres espèces d'expériences moins mathématiques que celles que nous venons d'étudier. Supposons qu'il s'agisse de trouver la loi de répartition des écarts qui se produisent en portée, quand on tire un canon sous un angle constant. Les différentes mesures que l'on fera donneront l'écart moyen et l'écart extrême; on prendra le rapport de ces deux quantités, soit, pour fixer les idées : $\frac{5}{16}$ le rapport trouvé. Nous avons vu, en calculant le tableau des valeurs de K_m, que $K_6 = \frac{5}{16}$. On conclura, par analogie, que les écarts se répartissent dans le tir d'un canon sous un angle constant de la même façon que dans l'expérience de six pièces, c'est l'expérience que nous avons étudiée en détail (*voir* la figure); OA représente l'écart extrême en portée.

On se sert habituellement, pour représenter la loi de probabilité des écarts, de la courbe

$$y = c^2 e^{-a^2 x^2}$$

due à Laplace.

Cette formule suppose que les écarts peuvent devenir infinis. C'est inadmissible; aussi allègue-t-on que si la formule suppose des écarts très grands, elle leur donne une probabilité très petite, et qu'elle peut être admise comme formule d'approximation.

Nous ne croyons pas cette approximation aussi grande qu'on veut bien le dire. En effet, l'équation

$$y = c^2 e^{-a^2 x^2},$$

tout en supposant des écarts infinis, donne un écart moyen fini, et nous avons trouvé le contraire pour l'expérience des pièces de monnaie.

On pourrait objecter à notre théorie qu'il est bien difficile de connaître l'écart extrême, par suite K_m; et qu'on sera embarrassé pour savoir à quel nombre de pièces de monnaie correspondent les expériences que l'on a en vue (tandis qu'avec la formule de Laplace on n'a pas cette difficulté).

Nous répondrons que notre théorie ne permet pas plus de résoudre un problème dont les données sont mal définies, que la Géométrie ne peut donner l'aire d'une surface dont les contours sont indéterminés; cela n'infirme en rien son exactitude.