NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

# Généralisation de la série de Lagrange

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 4 (1885), p. 316-321

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__316_0>

# GÉNÉRALISATION DE LA SÉRIE DE LAGRANGE;

PAR M. E. CESARO.

Dans le *Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes* (nº XXVIII, Lisboa, 1880), M. Teixeira est parvenu à une formule extrêmement remarquable, permettant de *développer, suivant les puissances croissante de $x$, la fonction $z$, en supposant que l'on ait*

$$z = f(y), \quad y = a + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + x^3\varphi_3(y) + \ldots.$$

Nous allons rattacher cette question aux principes précédemment exposés dans nos articles sur le *Calcul isobarique*.

Posons

$$u = x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + x^3\varphi_3(y) + \ldots.$$

Cette fonction dépend de $x$ et $y$ : nous désignerons par $u', u'', u''', \ldots$ ses dérivées successives, relatives à $x$. Cela étant, observons que

$$\frac{dy}{dx} = u' + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{da} = 1 + \frac{du}{dy}\frac{dy}{da},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = u'\frac{dy}{da}.$$

A cause de

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{da} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{da},$$

on a aussi

$$\frac{dz}{dx} = u'\frac{dz}{da}. \tag{1}$$

Cette relation sert de point de départ, dans la démonstration de M. Teixeira.

Rappelons, d'autre part, la *propriété fondamentale* de l'algorithme

$$U_{p,\nu} = \overset{\nu}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left[ \frac{u^{(r)}}{r!} \right].$$

Elle consiste dans l'égalité

$$(2) \qquad U'_{p,\nu} = (p+1)\,U_{p+1,\nu} - \nu\, u'\, U_{p,\nu-1},$$

ainsi que nous l'avons fait voir dans nôtre article sur les *dérivées des fonctions de fonctions*.

La relation (2) est toujours vraie, pourvu que l'on convienne de prendre $U_{p,\nu} = 0$, lorsque $\nu$ n'est pas compris entre 1 et $p$, inclusivement.

Cela posé, nous allons démontrer l'importante formule que voici :

$$(3) \qquad \frac{1}{p}\,\frac{d^p z}{dx^p} = \sum_{\nu=1}^{p} \left[ \frac{1}{\nu!}\,\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}} \left( \frac{dz}{da}\, U_{p,\nu} \right) \right]$$

Cette formule est vraie dans le cas de $p = 1$; car elle se réduit, alors, à l'égalité (1). La formule (3) sera donc établie si, en la supposant vraie pour la valeur $p$, on démontre qu'elle subsiste pour la valeur $p+1$. Or,

$$\frac{d}{dx}\left( \frac{dz}{da}\, U_{p,\nu} \right) = \frac{d}{da}\left( \frac{dz}{dx} \right) U_{p,\nu} - \frac{dz}{da}\left( U'_{p,\nu} + u'\,\frac{dU_{p,\nu}}{da} \right),$$

ou bien, en tenant compte de (1),

$$\frac{d}{dx}\left( \frac{dz}{da}\, U_{p,\nu} \right) = \frac{d}{da}\left( \frac{dz}{dx}\, U_{p,\nu} \right) - \frac{dz}{da}\, U'_{p,\nu},$$

ou enfin, en vèrtu de (2),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left( \frac{dz}{da}\, U_{p,\nu} \right) = {} & (p+1)\,\frac{dz}{da}\, U_{p+1,\nu} \\ & + \frac{d}{da}\left( \frac{dz}{dx}\, U_{p,\nu} \right) - \nu\,\frac{dz}{dx}\, U_{p,\nu-1} \end{aligned}$$

La dérivation de (3) donne donc

$$\frac{1}{(p+1)!}\frac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}\left(\frac{dz}{da}\mathrm{U}_{p+1,\nu}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{p+1}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu}}{da^{\nu}}\left(\frac{dz}{dx}\mathrm{U}_{p,\nu}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{p+1}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{1}{(\nu-1)!}\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}\left(\frac{dz}{dx}\mathrm{U}_{p,\nu-1}\right)\right].$$

Les deux dernières sommes s'entre-détruisent, à l'exception du terme

$$\frac{1}{(p+1)!}\frac{d^{p}}{da^{p}}\left(\frac{dz}{dx}\mathrm{U}_{p,p}\right) = \frac{1}{(p+1)!}\frac{d^{p}}{da^{p}}\left(\frac{dz}{da}\mathrm{U}_{p+1,p+1}\right).$$

$\mathrm{U}_{p,p}$ n'est autre chose, en effet, que $u'^{p}$. Donc, enfin,

$$\frac{1}{(p+1)!}\frac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p+1}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}\left(\frac{dz}{da}\mathrm{U}_{p+1,\nu}\right)\right].$$

C'est ce qu'il s'agissait de trouver.

Maintenant la question du développement de $z$ est bien facile à résoudre par l'emploi de la *formule de Maclaurin*. Remarquons d'abord que, pour $x = 0$, on a

$$y = a,\quad \frac{dz}{da} = f'(a),\quad u^{(r)} = r!\,\varphi_r(a).$$

Conséquemment, la formule (3) devient

$$(4)\qquad \frac{1}{p!}\left(\frac{d^{p}z}{dx^{p}}\right)_0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left\{\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}\left\{f'(a)\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{\nu}[\varphi_r(a)]\right\}\right\}.$$

Tel est le coefficient de $x^p$, dans le développement cherché.

Soit, par exemple,

$$z = f(y),\quad y = a + x\varphi(y).$$

Dans ce cas, pour $x = 0$

$$U_{p\,\nu} = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{en général,} \\ \varphi^{p}(a), & \text{pour } \nu = p. \end{array} \right.$$

La formule (4) donne donc

$$\left(\frac{d^p z}{dx^p}\right)_0 = \frac{d^{p-1}}{da^{p-1}}[f'(a)\varphi^p(a)].$$

Puis, par le théorème de Maclaurin,

$$f(y) = f(a) + \sum_{p=0}^{p=\infty} \left\{ \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \frac{d^p}{da^p}[f'(a)\varphi^{p+1}(a)] \right\}.$$

C'est la *formule de Lagrange*.

Voyons ce que devient la formule (4) dans d'autres cas particuliers. Soit à développer la fonction $y$, satisfaisant à la relation

$$y = a + \psi(x)\varphi(y),$$

où

$$\psi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Dans ce cas

$$\varphi_i(y) = a_i \varphi(y), \quad \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{\nu}[\varphi_i\ a)] = A_{p,\nu}\varphi^{\nu}(a),$$

pourvu que l'on pose

$$A_{p,\nu} = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{\nu}(a_i)$$

La formule (4) devient

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{d^p y}{dx^p}\right)_0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ \frac{A_{p,\nu}}{\nu!} \frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}[\varphi^{\nu}(a)] \right\}.$$

Soit, par exemple

$$y = a + (e^x - 1)e^y.$$

On sait que

$$A_{p,\nu} = \overset{\nu}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r!}\right) = \frac{\Delta^{\nu}(0^{p})}{p!}.$$

Par conséquent

$$\left(\frac{d^{p}y}{dx^{p}}\right)_{0} = \Delta(0^{p})\,e^{a} + \frac{2\,\Delta^{2}(0^{p})}{1.2}\,e^{2a} + \frac{3^{2}\,\Delta^{3}(0^{p})}{1.2.3}\,e^{3a} + \ldots.$$

Encore une application. Soit à chercher le développement de la fonction $y$, satisfaisant à la relation

$$y = a + x\psi(x+y).$$

Dans ce cas

$$f(x) = x, \quad \varphi_{r}(x) = \frac{\psi^{(r-1)}(x)}{(r-1)!},$$

et l'égalité (4) devient

$$(5) \qquad \frac{1}{p!}\left(\frac{d^{p}y}{dx^{p}}\right)_{0} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left\{\frac{1}{\nu!}\,\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu}}\,\overset{\nu}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{\psi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}\right]\right\}.$$

Les propriétés de l'algorithme W, étudié dans la Note *sur les dérivées des fonctions de fonctions*, permettent de donner, à l'égalité (5), la forme suivante :

$$(6) \qquad \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{d^{p}y}{dx^{p}}\right)_{0} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left\{C_{p,\nu}\,\overset{\nu}{\underset{p+\nu-1}{\mathrm{S}}}\left[\frac{\psi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}\right]\right\}.$$

Soit, par exemple, $\psi(x) = e^{x}$, de sorte que

$$y = a + xe^{x+y}.$$

On sait que

$$\overset{\nu}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{e^{a}}{(r-1)!}\right] = \frac{\nu^{p-\nu}}{(p-\nu)!}\,e^{\nu a}.$$

Par suite, la formule (6) devient

$$\left(\frac{d^{p}y}{dx^{p}}\right)_{0} = C_{p,1}e^{a} + 2^{p-1}C_{p,2}e^{2a} + 3^{p-1}C_{p,3}e^{3a} + \ldots$$

Tel est, dans le développement de $y$, le coefficient de $\frac{x^p}{p!}$.
On trouve ainsi

$$y = a - e^a x - (e^a - e^{2a}) x^2 - (e^a + 4e^{2a} + 3e^{3a}) \frac{x^3}{2}$$
$$+ (e^a - 12e^{2a} + 27e^{3a} + 64e^{4a}) \frac{x^4}{6} - \ldots$$

Dans tout ce qui précède, on n'a pas tenu compte de la convergence des séries qui résultent de l'application de la formule de Maclaurin. On sait que l'établissement des conditions de convergence constitue un important et délicat sujet d'études : il en est de même de la question de savoir quelle valeur de $y$ doit être considérée comme représentée par la série de Lagrange généralisée.