Nouvelles annales de mathématiques

E. Cesàro

Remarques sur un article de M. d'Ocagne

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 256-264

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__256_1>

REMARQUES SUR UN ARTICLE DE M. D'OCAGNE;

PAR M. E. CESARO,
Élève ingénieur des Mines.

1. Dans la livraison de décembre 1884 des *Nouvelles Annales,* M. d'Ocagne a exposé la théorie des

coordonnées axiales. Deux Notes, au bas de la première page, nous apprennent que ces coordonnées ont été déjà proposées et étudiées par MM. Aoust et Purkiss. Qu'il nous soit permis d'ajouter que nous avons aussi, dans *Mathesis,* traité, sous forme implicite, la même question, et, en particulier, nous avons donné l'équation axiale de la *tractrice,* signalée par M. d'Ocagne à la page 533. C'est à cause de cette équation que nous avons pu considérer la tractrice comme correspondant, par dualité, à la *spirale logarithmique*. D'ailleurs, on peut dire, en général, que *le système des coordonnées axiales et celui des coordonnées polaires sont corrélatifs*. Bien entendu, comme il s'agit ici de *grandeurs* à mesurer, la corrélation est loin d'être parfaite, tant que l'on reste dans le champ de la *Géométrie euclidienne*. Il est, par conséquent, désirable de voir quelque mathématicien s'occuper de l'étude des coordonnées axiales, dans la *Géométrie générale*.

II. 1° A la page 257 de la même livraison, on voit la figure d'une courbe, dont M. d'Ocagne a mis en évidence les remarquables propriétés. Or il n'est pas difficile de voir que la courbe en question est une *développante de cardioïde*. Ceci est une conséquence immédiate de la propriété suivante, facile à démontrer : *La normale, limitée aux axes, est égale à* $2a$. En outre, la théorie des mouvements plans fournit, pour le centre de courbure, une construction fort simple, fondée sur ce que *la projection de l'origine sur la normale et le centre de courbure sont également éloignés du milieu de la normale, limitée aux axes*.

2° On peut, par le pur calcul, arriver fort simplement à découvrir que la développée de la courbe dont il s'agit est une cardioïde. Observons d'abord que, lorsqu'on est parvenu à trouver, en fonction de la coordonnée θ, l'expression $f(\theta)$ du *rayon de courbure*, on obtient l'*équation intrinsèque* de la développée par l'élimination de θ entre les équations

$$\rho = f'(\theta), \quad s = f(\theta).$$

Or, M. d'Ocagne a démontré que

$$f(\theta) = \frac{a}{2}(1 + 3\cos 2\theta).$$

L'équation de la développée résulte donc de l'élimination de θ entre les équations

$$\rho = -3a\sin 2\theta, \quad s = \frac{a}{2}(1 + 3\cos 2\theta).$$

Il est, d'ailleurs, permis de remplacer s par $s + \frac{a}{2}$, en choisissant convenablement l'origine des arcs. On trouve enfin

$$\rho^2 + 4s^2 = 9a^2.$$

Cette équation représente une *hypocycloïde* à quatre rebroussements, engendrée par un point d'une circonférence, de diamètre a, roulant, sans glisser, à l'intérieur d'une circonférence de diamètre quadruple.

III. Une des propriétés les plus importantes, qui n'a pas été suffisamment remarquée, résulte de la définition même de la courbe, c'est-à-dire de l'égalité $OD = MN$. En effet, en vertu de cette égalité, les triangles rectangles ODT, MNT sont égaux, et, par suite, T *est le milieu de* ON. D'après cela, I est le milieu du segment NN' de la normale, limitée aux axes. Or M. d'Ocagne a démontré que $IN = a$. Donc $NN' = 2a$. Maintenant il est aisé de voir que l'on peut, à la construction indiquée par M. d'Ocagne, substituer la suivante : ayant pris, sur la circonférence de rayon $2a$, avec le centre en O, un point quelconque J, projetons-le sur les axes Ox, Oy, en N, N'. Le point M est la projection, sur NN', du milieu T de ON. En outre, la tangente est MT, et le centre de courbure est la projection de J sur NN'.

IV. Une intéressante application des coordonnées axiales consiste dans l'étude des courbes corrélatives des *conchoïdes*. Si l'on fait tourner d'un même angle ω les tangentes à une courbe quelconque A_0, autour des points où elles rencontrent une *droite fixe,* elles enveloppent, dans leurs positions nouvelles, une courbe A_ω. La construction par laquelle les courbes A_ω dérivent de A_0 peut être regardée comme corrélative de celle qui donne les conchoïdes d'une ligne donnée, relativement à un *point fixe*. Les propriétés des courbes A_ω sont des corollaires immédiats de la théorie des mouvements plans; mais nous voulons montrer comment on peut y parvenir par les formules que M. d'Ocagne a établies dans sa Note.

(a) Il est clair, avant tout, que l'équation axiale de A_ω, la droite fixe étant prise comme axe, se déduit de celle de A_0 par le changement de θ en $\theta - \omega$. Les dérivées $\frac{d\lambda}{d\theta}$, $\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}$, $\cdots$ sont donc les mêmes pour toutes les courbes. Transportons l'origine au point T, pied commun des tangentes aux courbes A_ω. On sait que les coordonnées du point de contact M_ω de l'une de ces droites avec la courbe correspondante sont

$$x = \frac{d\lambda}{d\theta} \sin(\theta + \omega) \cos(\theta + \omega), \quad y = \frac{d\lambda}{d\theta} \sin^2(\theta + \omega).$$

L'élimination de ω donne

$$x^2 + y^2 = \frac{d\lambda}{d\theta} y.$$

Par conséquent les points M_ω sont situés sur une circonférence K, de diamètre $\frac{d\lambda}{d\theta}$, tangente à l'axe au point T. Il en résulte que les normales concourent en un même point : c'est le point S, diamétralement opposé à T, sur K. On sait encore que le rayon de courbure de A_ω, au point M_ω, est

$$\rho_\omega = 2 \frac{d\lambda}{d\theta} \cos(\theta - \omega) + \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \sin(\theta + \omega).$$

Prenons, sur TS, la longueur SU, égale à TS. Transportons l'origine en S et l'axe des y en SU : dirigeons le nouvel axe des x en sens inverse de l'ancien, et prenons, sur sa partie positive, $SV = \frac{d^2\lambda}{d\theta^2}$. D'après la dernière formule, si C_ω est le centre de courbure de A_ω, on a

$$SC_\omega = SV \cos \widehat{USC_\omega} + SU \sin \widehat{USC_\omega}.$$

Le lieu des points C_ω est donc la circonférence K′, décrite sur UV comme diamètre.

(b) Parmi les lignes dérivées de A_0, la ligne $A_{\frac{\pi}{2}}$ est particulièrement remarquable. La transformation qui nous donne $A_{\frac{\pi}{2}}$, en partant de A_0, peut être appelée *recto-tangentielle :* si on l'applique à $A_{\frac{\pi}{2}}$, on retrouve A_0. Dans la famille des lignes A_ω, chaque ligne a donc sa conjuguée. Une parabole, par exemple, est sa propre transformée rectotangentielle, ou bien celle de son foyer, suivant que l'on choisit pour axe de transformation la directrice ou la tangente au sommet. Les points correspondants de deux lignes conjuguées sont diamétralement opposés, sur K. Il en est de même, sur K', des centres de courbure. Les deux diamètres font un angle constant, de sorte que leur point d'intersection décrit une circonférence : celle-ci passe par les centres des circonférences K, K', et par leur point de rencontre Q, autre que S. Il y aurait à considérer, plus généralement, les *transformations axiales* des courbes planes, corrélatives des *transformations centrales,* étudiées par M. d'Ocagne dans *Mathesis.*

(c) Le point Q constitue, évidemment, pour la courbe correspondante, un point de rebroussement. Si $\lambda = f(\theta)$ est l'équation axiale de A_0, l'équation du *lieu des rebroussements* résulte de l'élimination de τ entre les égalités

$$\lambda = f(\tau), \quad \operatorname{tang}\theta = -2\frac{f'(\tau)}{f''(\tau)}.$$

Souvent, la construction de Q, moyennant les circonférences K, K', permet d'obtenir avec plus de facilité le lieu des rebroussements. C'est ainsi que, dans le cas d'une parabole, dont la tangente au sommet est prise comme *axe,* on voit immédiatement que le lieu en question se réduit au foyer. Pour une cycloïde, c'est la base qui est le lieu des rebroussements, lorsqu'on prend pour axe la tangente aux sommets.

(d) Le lieu des rebroussements est très important, parce qu'il suffit pour *définir* une famille de lignes A_ω. A cet effet, observons que le point Q est, en vertu de sa définition, un point d'intersection des deux cercles K consécutifs. Il en résulte que l'enveloppe de K est constituée par l'axe et le lieu des rebroussements. Ces deux lignes étant données, si l'on fait mouvoir la circonférence enveloppée, son diamètre $\frac{d\lambda}{d\theta}$ est nécessairement fonction du chemin λ, parcouru par son point de contact avec l'axe. Si l'on écrit la relation existant entre ces grandeurs, on connaîtra par intégration l'équation générale des lignes A_ω, contenant une constante arbitraire. A chaque valeur de la constante correspond une ligne particulière. Il est aisé de reconnaître que, si $\lambda = f(\theta)$ est l'équation axiale de la ligne des rebroussements, l'équation différentielle générale des lignes A_ω résulte de l'élimination de τ entre les égalités

$$\lambda = f(\tau) + f'(\tau)\sin\tau, \quad \frac{d\lambda}{d\theta} = 4f'(\tau)\sin^2\frac{\tau}{2}\ (^1).$$

V. (*a*) Il est important de savoir quelle transformation axiale correspond à la transformation centrale, dite *par rayons vecteurs réciproques*. En cherchant à résoudre cette question, on est inévitablement conduit à étudier la transformation axiale, définie par la relation

$$\tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2} = \text{const}.$$

Si M est un point d'une courbe quelconque, et T le point où la tangente en M rencontre l'axe des λ (*axe de transformation*), la circonférence de centre T, passant par M, est le lieu de tous les points qui correspondent à M sur les différentes *axiales réciproques* de la courbe considérée. Les tangentes à ces courbes, aux points correspondants, *concourent*, par définition, *en un même point*

---

(1) En terminant ces remarques, nous nous apercevons d'avoir appelé improprement *cardioïde*, d'après la nomenclature proposée par quelques géomètres, l'hypocycloïde à *quatre* rebroussements, tandis que c'est à l'épicycloïde à *un* seul rebroussement que l'on donne ordinairement ce nom.

de l'axe. En outre, *elles ont*, d'après ce qui a été dit plus haut, *des longueurs égales*, pourvu qu'on les suppose limitées entre l'axe et leurs points de contact. Ce théorème, corrélatif d'une proposition fort connue dans la théorie de l'inversion polaire, a pour corollaire immédiat la proposition suivante : *Les axiales réciproques d'une tractrice, par rapport à sa directrice, sont les tractrices égales, admettant même directrice* ([1]). On doit se rappeler que, dans l'inversion polaire, la spirale logarithmique a pour transformées, relativement à son pôle, les spirales égales, de même pôle.

(*b*) Autre théorème très remarquable : *Les centres de courbure de deux axiales réciproques, en deux points correspondants, sont sur une perpendiculaire à l'axe*. Corollaire : *Un cercle a pour axiale réciproque, par rapport à une droite quelconque, tout cercle qui admet avec lui, pour axe radical, la droite considérée.*

(*c*) Parmi les axiales réciproques d'une courbe donnée il y en a généralement deux, à chaque instant, qui présentent un *point de rebroussement*. Ces points de rebroussement sont, évidemment, ceux où la circonférence (T), *lieu instantané des points de contact*, rencontre la perpendiculaire à l'axe, *lieu instantané des centres de courbure*. C'est en ces points aussi que la même circonférence touche son enveloppe. Le *lieu des rebroussements* coïncide donc avec l'enveloppe de (T). Ces circonstances sont aisées à reconnaître dans le cas de la tractrice. Alors le cercle (T) est invariable, et le

---

([1]) Il y aurait à résoudre la question suivante : *Quelles sont les courbes égales à leurs axiales réciproques?* On sait que la *question corrélative* a été amplement traitée par M. Genocchi.

lieu des rebroussements est constitué par deux parallèles à l'axe, équidistantes de celui-ci. Enfin, les centres de courbures se trouvent sur le diamètre de (T), perpendiculaire à l'axe, propriété connue.

(*d*) M. d'Ocagne, à qui nous avons communiqué ces remarques, nous a fait observer que l'*inversion axiale*, dont il vient d'être question, ne diffère pas essentiellement de la *transformation par semi-droites réciproques,* imaginée par M. Laguerre. Le théorème (*a*) est dû à M. Laguerre, ainsi que le corollaire (*b*). Ce dernier théorème a été, avec quelques autres remarques, le sujet d'une Communication orale, faite par M. d'Ocagne à la *Société Mathématique de France* (18 mai, 1883) ([1]). Enfin, nous devons ajouter que, dans ses articles des *Nouvelles Annales,* M. Laguerre n'a pas manqué de faire ressortir la corrélation existant entre les transformations par rayons vecteurs et par semi-droites réciproques. Cependant nous n'avons pas jugé inutile d'appeler de nouveau l'attention des lecteurs sur cette intéressante transformation, surtout pour en donner un exposé pour ainsi dire immédiat, n'exigeant pas de connaissances préalables, ne se rattachant à aucune théorie spéciale, et ne demandant que l'emploi facile et naturel des coordonnées axiales.

([1]) Nous apprenons que M. d'Ocagne va réunir tous ces résultats en une intéressante brochure sur les transformations axiales et, en particulier, sur la transformation *orthotangentielle,* à laquelle M. d'Ocagne est parvenu indépendamment de nos propres recherches. Nous ferons seulement observer que nous avons eu, depuis longtemps, l'idée de cette transformation, comme le prouve la *Question* 296, proposée dans *Mathesis* (t. III).