CH. BIEHLER

Sur la construction des courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 223-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__223_1>

SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES

[SUITE (1)];

PAR M. CH. BIEHLER.

II.

THÉORIE DES ASYMPTOTES.

1. Nous supposerons, comme précédemment, que l'équation de la courbe soit donnée sous la forme

$$(1)\quad \rho^m \varphi_m(\omega) + \rho^{m-1} \varphi_{m-1}(\omega) + \ldots + \rho\, \varphi_1(\omega) + \varphi(\omega) = 0.$$

Soit α une racine simple de l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$, c'est-à-dire soit $\varphi_m(\alpha) = 0$ et $\varphi'_m(\alpha) \gtrless 0$.

Nous supposerons, pour commencer, que $\varphi_{m-1}(\alpha)$ soit aussi différent de zéro.

Lorsque ω s'approche de α, une seule racine de l'équation (1) augmente indéfiniment; toutes les autres tendent vers des limites finies; il est aisé de trouver le signe de cette racine.

On a, en effet, en désignant par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ les m racines de l'équation en ρ,

$$(2)\quad \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m = -\frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)};$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. IV, p. 153.

et l'on voit que le signe de la racine qui augmente indéfiniment est donné par le signe du second membre, lorsque ω est suffisamment voisin de α.

Nous poserons $\omega = \alpha + \varepsilon$, comme nous l'avons déjà fait, et nous ferons tendre ε vers zéro.

La quantité $-\frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)}$ prend alors la forme

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)} = \frac{[\varphi_{m-1}(\alpha) - \varepsilon\varphi'_{m-1}(\alpha) + \ldots]}{\varepsilon\varphi'_m(\alpha) - \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi'_m(\alpha) - \ldots},$$

et, par suite, elle a le signe de

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varepsilon\varphi'_m(\alpha)}.$$

Or l'asymptote correspondant à cette racine, nécessairement réelle, qui augmente indéfiniment, a pour équation, comme l'on sait,

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = l,$$

l étant la limite de $\rho\sin(\omega - \alpha)$ tirée de l'équation de la courbe, lorsque ω tend vers α.

Cette limite nous est fournie immédiatement par l'équation (2). Si ρ_1 est la racine qui augmente indéfiniment, et S_1 la somme de toutes les autres racines, l'équation (2) prend la forme

$$\rho_1 + S_1 = -\frac{\varphi_{m-1}(\alpha) + \varepsilon\varphi'_{m-1}(\alpha) + \ldots}{\varepsilon\varphi'_m(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_m(\alpha) + \ldots}$$

et, par suite,

$$\rho_1 \sin\varepsilon + S_1 \sin\varepsilon = -\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{[\varphi_{m-1}(\alpha) + \ldots]}{\varphi'_m(\alpha)};$$

on en déduit

$$\lim \text{ de } \rho_1 \sin\varepsilon = -\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)}.$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = - \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)}.$$

2. Pour savoir de quel côté de l'asymptote se trouve la courbe, il faut connaître le signe de la différence

$$\lambda = \rho_1 \sin\varepsilon - l,$$

pour les valeurs de ε voisines de zéro. Cette différence a pour expression

$$\lambda = - \sin\varepsilon \frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)} + \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)} - S_1 \sin\varepsilon$$

ou bien

$$\lambda = - \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varphi_{m-1}(\alpha) + \varepsilon\varphi'_{m-1}(\alpha) + \ldots}{\varphi'_m(\alpha) + \frac{\varepsilon}{1.2}\varphi''_m(\alpha) + \ldots} + \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)} - S_1 \sin\varepsilon;$$

si l'on observe que $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$ est de la forme

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{1.2.3} + \frac{\varepsilon^4 \times \theta}{1.2.3.4.5},$$

θ étant < 1, on voit que λ a le signe de

$$\left[\frac{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(\alpha)\varphi_{m-1}(\alpha) - \varphi'_m(\alpha)\varphi'_{m-1}(\alpha)}{\varphi'^2_m(\alpha)} - S_1\right]\varepsilon.$$

Or S_1, étant la somme des racines $\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_m$, est une quantité aussi voisine qu'on veut de $-\frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi_{m-1}(\alpha)}$ qui représente la somme des racines de l'équation

$$\rho^{m-1}\varphi_{m-1}(\omega) + \rho^{m-2}\varphi_{m-2}(\omega) + \ldots + \varphi(\omega) = 0$$

pour $\omega = \alpha$.

On voit donc, en définitive, que λ a le signe de

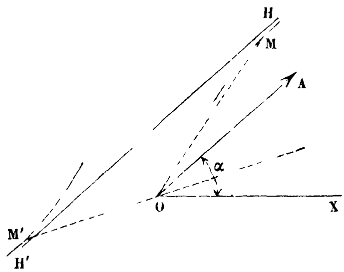
$$\left[\frac{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(\alpha)\varphi_{m-1}(\alpha) - \varphi'_m(\alpha)\varphi'_{m-1}(\alpha)}{\varphi'^2_m(\alpha)} + \frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi_{m-1}(\alpha)}\right]\varepsilon.$$

Soient OA le rayon polaire mené dans la direction α, HH′ l'asymptote; λ représente la distance du point M situé sur le rayon vecteur $\alpha + \varepsilon$, à la droite HH′.

Si λ est négatif, le point M est au-dessous de HH′; si λ est positif, le point M est au-dessus de cette droite.

Le rayon OM est mené dans la direction $\alpha + \varepsilon$, ε étant positif; et OM′, dans la direction $\alpha + \varepsilon$, ε étant supposé négatif. On voit que, quand ε change de signe, ρ_1 change

Fig. 1.



de signe, ainsi que λ. On obtient une disposition des branches de la courbe autour de l'asymptote analogue à celle de la *fig.* 1; cette figure a été construite dans l'hypothèse où le coefficient de ε dans λ est négatif.

3. Supposons actuellement que le coefficient de ε dans λ soit nul; dans ce cas, λ sera de la forme

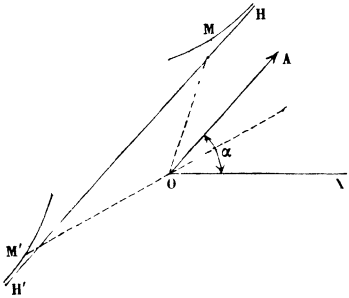
$$\lambda = \lambda_0 \varepsilon^2 + \lambda' \varepsilon^3,$$

λ_0 étant une quantité indépendante de ε et λ' une fonction de ε.

On voit que, pour des valeurs suffisamment petites de ε, λ a constamment le signe de λ_0, quel que soit le signe de ε; par suite, la courbe se trouve tout entière d'un côté de l'asymptote, et le point correspondant à l'infini est un point d'inflexion (*fig.* 2).

La figure a été construite dans l'hypothèse de $\lambda_0 > 0$.

Fig. 2.



Le point d'inflexion est donc caractérisé par la propriété suivante :

$$\frac{\frac{1}{2}\varphi''_m(\alpha)\,\varphi_{m-1}(\alpha) - \varphi'_m(\alpha)\,\varphi'_{m-1}(\alpha)}{\varphi'^2_m(\alpha)} + \frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi_{m-1}(\alpha)} = 0.$$

4. Supposons actuellement

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi_{m-1}(\alpha) = 0.$$

Dans ce cas, deux racines de l'équation en ρ augmentent indéfiniment; soient ρ_1 et ρ_2 ces deux racines, nous avons les formules

$$(a) \qquad \rho_1 + \rho_2 = A + A'\varepsilon,$$

$$(b) \qquad \rho_1 \rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon},$$

A et B étant des quantités indépendantes de ε, dont il est aisé de trouver les valeurs; A' et B' étant des fonctions de ε qu'il est inutile de déterminer, mais dont on trouverait aussi facilement les expressions. Des formules (a) et (b), on tire

$$(c) \qquad (\rho_1 - \rho_2)^2 = (A + A'\varepsilon)^2 - 4\left(\frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

Le second membre a le signe de $-\frac{4B}{\varepsilon}$, et, par suite, ρ_1 et ρ_2 ne peuvent être réels que si

$$-\frac{4B}{\varepsilon} > 0,$$

c'est-à-dire si ε est de signe contraire à B.

Les formules (a) et (b) nous montrent que la somme

$$\rho_1 \sin\varepsilon + \rho_2 \sin\varepsilon$$

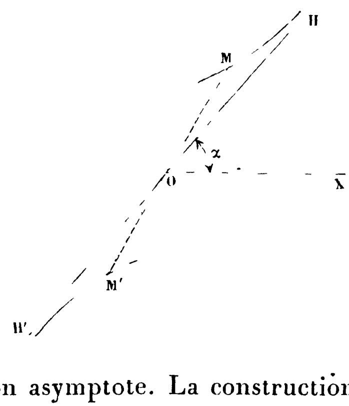
et le produit

$$\rho_1 \sin\varepsilon \times \rho_2 \sin\varepsilon$$

des quantités $\rho_1 \sin\varepsilon$, $\rho_2 \sin\varepsilon$ ont pour limites zéro ; chacune de ces quantités a donc pour limite zéro. L'asymptote correspondant aux branches de courbe engendrées par ρ_1 et ρ_2 est donc confondue avec le rayon polaire mené dans la direction α.

Le signe de B nous donne la disposition de la courbe

Fig. 3.



autour de son asymptote. La construction de la *fig.* 3 suppose B négatif.

La valeur de B est $\frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)}$, quantité différente de zéro et parfaitement déterminée dans l'hypothèse où nous nous sommes placés.

3. Nous n'examinerons pas en ce moment le cas où l'on aurait simplement

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'_m(\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire où l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$ aurait une racine double; mais nous y ajouterons la condition

$$\varphi_{m-1}(\alpha) = 0,$$

nous réservant de discuter le cas précédent quand il s'agira de la construction des branches paraboliques.

Nous aurons, dans ce cas, des formules de la forme

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^2}$$

pour exprimer les deux racines qui augmentent indéfiniment. Les quantités A, B et le terme indépendant de ε dans A′ et B′ sont aisés à calculer.

Ces formules nous donnent

$$\rho_1 \sin\varepsilon + \rho_2 \sin\varepsilon = \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}(A + A'\varepsilon).$$

$$\rho_1 \sin\varepsilon \times \rho_2 \sin\varepsilon = \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}(B + B'\varepsilon).$$

Lorsque ε tend vers zéro, les quantités $\rho_1 \sin\varepsilon$, $\rho_2 \sin\varepsilon$ tendent vers des limites l_1, l_2, telles que l'on ait

$$l_1 + l_2 = A,$$
$$l_1 l_2 = B;$$

l_1 et l_2 sont donc les racines de l'équation du second degré

$$l^2 - Al + B = 0.$$

On voit aisément que

$$A = -\frac{\varphi'_{m-1}(\alpha)}{\frac{1}{2}\varphi''_m(\alpha)}, \quad B = \frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\frac{1}{2}\varphi'_m(\alpha)},$$

de telle sorte que l'équation du second degré qui a pour racines l_1 et l_2 est la suivante :

$$\tfrac{1}{2}\varphi''_m(\alpha)l^2 + \varphi'_{m-1}(\alpha)l + \varphi_{m-2}(\alpha) = 0.$$

Il nous faut maintenant chercher la disposition de la courbe autour des deux asymptotes parallèles

$$\rho\sin(\omega-\alpha) = l_1, \quad \rho\sin(\omega-\alpha) = l_2.$$

Désignons par λ_1 et λ_2 les fonctions $\rho_1\sin\varepsilon$, $\rho_2\sin\varepsilon$; on aura

$$(a') \qquad \lambda_1+\lambda_2 = \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}(A + A'\varepsilon),$$

$$(b') \qquad \lambda_1\lambda_2 = \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}(B - B'\varepsilon);$$

il faut calculer les différences

$$\lambda_1 - l_1, \quad \lambda_2 - l_2.$$

Soient $\lambda' = \lambda_1 - l_1$, $\lambda'' = \lambda_2 - l_2$; on aura

$$\lambda' + \lambda'' = \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}(A - A'\varepsilon) - A;$$

d'autre part, les égalités (a) et (b) nous donnent

$$(c') \qquad (\lambda_1-\lambda_2)^2 = \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}[(A + A'\varepsilon)^2 - 4(B - B'\varepsilon)],$$

et, comme on a

$$(l_1 - l_2)^2 = A^2 - 4B,$$

il viendra

$$\begin{aligned}(\lambda_1-\lambda_2)^2 &- (l_1-l_2)^2 \\ &= (A^2-4B)\left(\frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2} - 1\right) + \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}(2AA' - 4B' + A'^2\varepsilon).\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$2AA' - 4B' = 2C + C'\varepsilon,$$

C étant indépendant de ε, l'égalité précédente prendra la forme

$$(\lambda_1-\lambda_2)^2 - (l_1-l_2)^2 = 2C\varepsilon - C''\varepsilon^2.$$

car

$$\frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} = 1 - \theta\varepsilon^2, \quad 0 < 1;$$

par suite,

$$(\lambda' - \lambda'')(\lambda_1 - \lambda_2 + l_1 - l_2) = 2C\varepsilon + C''\varepsilon^2;$$

mais, comme l_1 et l_2 sont les limites respectives vers lesquelles tendent λ_1 et λ_2, on peut écrire

$$\lambda_1 - \lambda_2 + l_1 - l_2 = 2(l_1 - l_2) + \eta,$$

η ayant pour limite zéro quand ε tend vers zéro; on voit donc que

$$\lambda' - \lambda'' = \frac{2C\varepsilon + C''\varepsilon^2}{2(l_1 - l_2) + \eta},$$

$\lambda' - \lambda''$ a donc le signe de $\frac{C\varepsilon}{l_1 - l_2}$; on connaît donc les valeurs de $\lambda' + \lambda''$ et de $\lambda' - \lambda''$.

Si l'on fait

$$A' = A'_1 + A'_1\varepsilon,$$

on aura

$$\lambda' + \lambda'' = A'_1\varepsilon + A''_1\varepsilon^2,$$

$$\lambda' - \lambda'' = \frac{C}{l_1 - l_2}\varepsilon + C''\varepsilon^2;$$

par suite,

$$2\lambda' = \left(A'_1 + \frac{C}{l_1 - l_2}\right)\varepsilon + \ldots,$$

$$2\lambda'' = \left(A'_1 - \frac{C}{l_1 - l_2}\right)\varepsilon + \ldots;$$

λ' et λ'' ont donc les signes des quantités

$$A'_1 + \frac{C}{l_1 - l_2}, \quad A'_1 - \frac{C}{l_1 - l_2}.$$

Si l'on prend pour l_1 la racine

$$l_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

l_2 sera

$$l_2 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

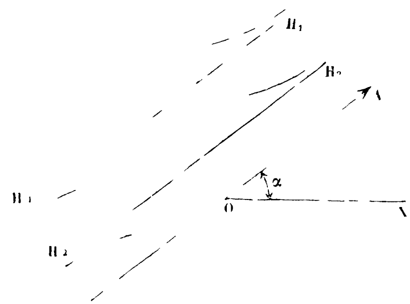
et

$$2\lambda' \text{ aura le signe de } \left(A'_1 + \frac{C}{\sqrt{A^2 - 4B}}\right) z,$$

$$2\lambda'' \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \left(A'_1 - \frac{C}{\sqrt{A^2 - 4B}}\right) z.$$

Ces formules nous permettent de construire la courbe autour de ses asymptotes. Nous supposons $A^2 - 4B > 0$; cette condition est nécessaire pour que les racines ρ_1, ρ_2 soient réelles pour des valeurs de ω suffisamment voi-

Fig. 4



sines de α. La *fig.* 4 a été construite dans l'hypothèse où les deux coefficients de z dans λ' et λ'' sont positifs.

Si $A^2 - 4B < 0$, le point à l'infini est isolé, ρ_1 et ρ_2 sont imaginaires.

6. Si $A^2 - 4B = 0$, les racines de l'équation du second degré en l sont égales, les deux asymptotes se confondent, et l'asymptote unique que l'on obtient a pour équation

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = \frac{A}{2}$$

ou bien

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = -\frac{\varphi'_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_{m}(\alpha)}.$$

Nous allons construire la courbe autour de cette asymptote

Dans ce cas,

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda' - \lambda''$$

et, par suite,

$$(\lambda' - \lambda'')^2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2}[(2AA' - 4B')\varepsilon + A'^2 \varepsilon^2].$$

Cette équation se met aisément sous la forme

$$(\lambda' - \lambda'')^2 = 2C\varepsilon + C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon^3.$$

et l'on a

$$\lambda' - \lambda'' = A'_1 \varepsilon - A''_1 \varepsilon^2;$$

ces formules nous montrent que $C\varepsilon$ doit être positif, pour que $\lambda' - \lambda''$ et, par suite, λ' et λ'' soient réels; ε ne peut recevoir que des valeurs d'un signe déterminé; c'est le terme $\pm\sqrt{C\varepsilon}$ qui donne son signe à λ' et λ'' qui sont, par suite, de signe contraire. Comme l'on a $A^2 - 4B = 0$, on a forcément B positif; par suite, la formule

$$\rho_1\rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^2}$$

nous montre que ρ_1 et ρ_2 sont de même signe; on obtient donc une disposition de la courbe analogue à celle de la *fig.* 5. Le point à l'infini est de rebroussement de première espèce.

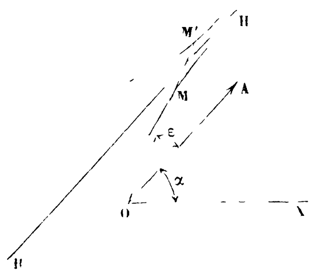
Mais, si $C = 0$, $(\lambda' - \lambda'')^2$ prendra la forme

$$(\lambda' - \lambda'')^2 = C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon^3.$$

et, par suite, $\lambda' - \lambda''$ est aussi voisin que l'on veut de $\pm\varepsilon\sqrt{C_1}$.

Si $C_1 < 0$, le point de rebroussement à l'infini est isolé; si $C_1 > 0$, des branches de courbes réelles accom-

Fig. 5.



pagneront l'asymptote, et l'on aura pour $\lambda' - \lambda''$ une expression de la forme

$$\lambda' - \lambda'' = \pm \left(\varepsilon \sqrt{C_1} + \varepsilon^2 C'_1 + \ldots \right);$$

d'autre part,

$$\lambda' + \lambda'' = A'_1 \varepsilon + A''_1 \varepsilon^2;$$

par suite,

$$2\lambda' = \left(A'_1 + \sqrt{C_1} \right) \varepsilon + \ldots,$$
$$2\lambda'' = \left(A'_1 - \sqrt{C_1} \right) \varepsilon + \ldots;$$

en prenant le signe $+$ devant le radical, ce qui est permis, λ' et λ'' ont le signe du coefficient de ε.

Si ces coefficients sont de même signe, on obtient la

Fig. 6.

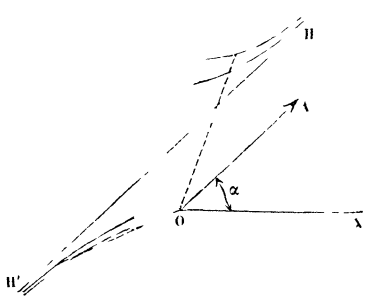


fig. 6: s'ils sont de signe contraire, on obtient la *fig.* 7.

La *fig.* 6 a été construite dans l'hypothèse où les coefficients de ε dans λ' et dans λ'' sont positifs.

Mais, si $C_1 = o$,

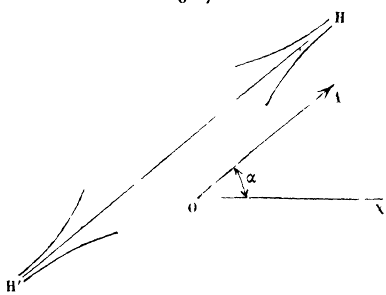
$$\lambda' - \lambda'' = \pm\sqrt{C_2}\,\varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

$$2\lambda' = A'_1\,\varepsilon + \sqrt{C_2}\,\varepsilon^{\frac{3}{2}} + A'_2\,\varepsilon^2,$$

$$2\lambda'' = A'_1\,\varepsilon - \sqrt{C_2}\,\varepsilon^{\frac{3}{2}} + A'_2\,\varepsilon^2;$$

ε ne peut plus recevoir que des valeurs du signe de C_2 (on peut substituer à C_2 la valeur que prend cette fonc-

Fig. 7.



tion pour $\varepsilon = o$); on voit que λ' et λ'' seront de même signe; ce signe est celui de $A'_1\,\varepsilon$. On obtient un rebroussement de seconde espèce. (*A suivre.*)