Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Biehler

Sur la construction des courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 153-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__153_0>

SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES

[SUITE (1)];

PAR M. CH. BIEHLER.

6. Nous supposerons d'abord que l'équation de la courbe soit donnée sous la forme

$$\rho = F(\omega) \quad \text{ou} \quad u = f(\omega),$$

en posant $\frac{1}{\rho} = u$,

$$F(\omega) = \frac{1}{f(\omega)}.$$

Soient $\omega = \alpha$, $u = a$ les coordonnées d'un point; nous allons chercher la forme de la courbe autour de ce point.

L'équation de la tangente au point $\omega = \alpha$, $u = a$ de la courbe $u = f(\omega)$ s'obtient, comme l'on sait, en égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & \cos\omega & \sin\omega \\ f(\alpha) & \cos\alpha & \sin\alpha \\ f'(\alpha) & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix},$$

ou bien, en développant,

$$u = f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha).$$

Le rayon vecteur de la courbe est donné par

$$u = f(\omega).$$

La différence entre les valeurs de u qui se rapportent à

(1) *Nouvelles Annales de Mathematiques*, 3e série, t. III; 1884.

la courbe et à la droite est donc donnée par l'expression

$$\Phi(\omega) = f(\omega) - f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) - f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha).$$

C'est le signe de la fonction $\Phi(\omega)$ pour des valeurs de ω voisines de α qui donne la forme de la courbe dans le voisinage du point de contact. Or $\Phi(\omega)$ s'annule pour $\omega = \alpha$; sa dérivée

$$\Phi'(\omega) = f'(\omega) + f(\alpha)\sin(\omega - \alpha) - f'(\alpha)\cos(\omega - \alpha)$$

s'annule également pour $\omega = \alpha$; mais la dérivée seconde

$$\Phi''(\omega) = f''(\omega) + f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha)$$

devient égale à $f''(\alpha) + f(\alpha)$ pour $\omega = \alpha$.

Supposons que $\Phi''(\alpha) = f''(\alpha) + f(\alpha)$ soit une quantité différente de zéro, et, pour fixer les idées, supposons-la positive : on pourra trouver une quantité angulaire ε, telle qu'entre $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon$ la fonction $\Phi''(\omega)$ ait le signe de $\Phi''(\alpha)$ et, par suite, soit positive; la dérivée $\Phi'(\omega)$ est donc croissante dans tout l'intervalle de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega = \alpha$, elle est négative quand ω varie de $\alpha - \varepsilon$ à α et positive de α à $\alpha + \varepsilon$; la fonction $\Phi(\omega)$ est donc décroissante entre $\alpha - \varepsilon$ et α et croissante entre α et $\alpha + \varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega = \alpha$, elle est positive de $\alpha - \varepsilon$ à α et de α à $\alpha + \varepsilon$. La courbe se trouve donc tout entière d'un même côté de sa tangente dans le voisinage du point de contact; et, dans l'hypothèse faite, le rayon vecteur de la tangente l'emporte sur celui de la courbe; par suite, la courbe est concave vers le pôle.

On arriverait à la conclusion inverse si l'on supposait

$$f''(\alpha) + f(\alpha) < 0,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, la courbe serait convexe vers le pôle.

7. Supposons maintenant

$$f''(\alpha)+f(\alpha)=0,$$

et calculons la valeur de $\Phi'''(\alpha)$.

Or

$$\Phi'''(\omega)=f'''(\omega)-f(\alpha)\sin(\omega-\alpha)+f'(\alpha)\cos(\omega-\alpha),$$

par suite,

$$\Phi'''(\alpha)=f'''(\alpha)+f'(\alpha).$$

Supposons cette quantité différente de zéro, positive par exemple. Dans ce cas, on pourra trouver une quantité angulaire ε, telle qu'entre $\alpha-\varepsilon$ et $\alpha+\varepsilon$ la fonction $\Phi'''(\omega)$ conserve le même signe et, par suite, soit positive. $\Phi''(\omega)$ est, dans ce cas, croissante entre $\alpha-\varepsilon$ et $\alpha+\varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega=\alpha$, elle est négative entre $\alpha-\varepsilon$ et α et positive entre α et $\alpha+\varepsilon$; la fonction $\Phi'(\omega)$ est donc décroissante entre $\alpha-\varepsilon$ et α et croissante entre α et $\alpha+\varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega=\alpha$, elle est positive dans tout l'intervalle de $\alpha-\varepsilon$ à $\alpha+\varepsilon$; par suite, $\Phi(\omega)$ est croissante dans tout cet intervalle, et, comme elle s'annule pour $\omega=\alpha$, elle est négative entre $\alpha-\varepsilon$ et α et positive entre α et $\alpha+\varepsilon$. La courbe est donc convexe vers le pôle entre $\alpha-\varepsilon$ et α et concave entre α et $\alpha+\varepsilon$. Le point $\omega=\alpha$, $u=a$ est un point d'inflexion.

La discussion précédente fait donc voir que les points d'inflexion d'une courbe sont donnés par l'équation

$$f(\omega)+f''(\omega)=0$$

ou

$$\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''=0.$$

Elle montre, de plus, que, si la première des dérivées de la fonction $\Phi(\omega)$ qui ne s'annule pas est d'ordre pair 2μ, la courbe est convexe vers le pôle autour du point

$\omega=\alpha$, $u=a$, si $\Phi^{(2\mu)}(\alpha)<0$, et concave si $\Phi^{(2\mu)}(\alpha)>0$. Si la première des dérivées de la fonction $\Phi(\omega)$ qui ne s'annule pas pour $\omega=\alpha$ est d'ordre impair $2\mu+1$, le point considéré est un point d'inflexion, et il sera toujours possible de préciser la forme de la courbe autour de ce point d'après le signe de $\Phi^{(2\mu+1)}(\alpha)$.

Nous avons supposé que l'équation de la courbe est donnée sous la forme

$$u=f(\omega).$$

Si l'équation de la courbe était $F(u,\omega)=0$ non résolue par rapport à u, il est possible de déterminer, d'après ce qui précède, la forme de la courbe en un point $u=a$, $\omega=\alpha$; car les quantités $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, ..., $f^{2\mu}(\alpha)$, $f^{2\mu+1}(\alpha)$ qui interviennent dans la discussion précédente peuvent être tirées de l'équation de la courbe; ce sont les quantités u', u'', ... qui sont fournies par les égalités

$$\begin{gathered}
F'_\omega+u'F'_u=0,\\
F''_{\omega^2}+2u'F''_{\omega u}+u'^2F''_{u^2}+u''F'_u=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Toutefois ce procédé n'est plus applicable quand $F'_u=0$.

Supposons l'équation $F(u,\omega)=0$ algébrique et de degré m en u, et proposons-nous de construire, dans le cas précédent, cette courbe autour du point $u=a$, $\omega=\alpha$.

Posons, pour cela,

$$u=a+V,\quad \omega=\alpha+\varepsilon,$$

l'équation de la courbe deviendra

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
0&=\varepsilon F'_\omega(a,\alpha)+VF'_u(a,\alpha)\\
&\quad+\frac{\varepsilon^2}{1.2}F''_{\omega^2}(a,\alpha)+\varepsilon VF''_{\omega u}(a,\alpha)+\frac{V^2}{1.2}F''_{u^2}(a,\alpha)+\ldots
\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(2) \qquad 0 = \Phi(\alpha, \varepsilon) + V\,\Phi_1(\alpha, \varepsilon) + \ldots + V_m\,\Phi_m(\alpha, \varepsilon)$$

Si $F'_u(a, \alpha) = 0$ et $F'_\omega(a, \alpha) \gtrless 0$, les deux fonctions $\Phi(a, \varepsilon)$, $\Phi_1(a, \varepsilon)$ sont divisibles par ε, et, par suite, quand ε tend vers zéro, deux des racines de l'équation (2) tendront vers zéro.

En désignant par V_1 et V_2 ces deux racines, par $V_3, \ldots, V_m$ les autres, on a

$$\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \ldots + \frac{1}{V_m} = -\frac{\Phi_1(\alpha, \varepsilon)}{\Phi(\alpha, \varepsilon)},$$

$$\frac{1}{V_1 V_2} + \ldots + \frac{1}{V_{m-1} V_m} = \frac{\Phi_2(\alpha, \varepsilon)}{\Phi(\alpha, \varepsilon)},$$

ou bien

$$\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} = -\left[\frac{F''_{\omega u}(a, \alpha)}{F'_\omega(a, \alpha)} + \varphi(\alpha, \varepsilon) + S_1\right],$$

$$\frac{1}{V_1 V_2} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_\omega(a, \alpha)} + \psi(\alpha, \varepsilon) + S_2\right],$$

S_1 est la somme des quantités $\frac{1}{V_3} + \cdots + \frac{1}{V_m}$, et S_2 la somme des produits deux à deux des mêmes quantités, $\varphi(\alpha, \varepsilon)$ et $\psi(\alpha, \varepsilon)$ sont des fonctions qui renferment ε en facteur.

De ces formules on tire la suivante :

$$\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon}\left[-\frac{4F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_\omega(a, \alpha)} + \Theta(\alpha, \varepsilon)\right],$$

$\Theta(\alpha, \varepsilon)$ renfermant ε en facteur.

Les racines V_1 et V_2 ne sont donc réelles qu'autant que ε est de signe contraire à

$$\frac{F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_\omega(a, \alpha)};$$

par suite, si $F''_{u^2}(a, \alpha)$ est différent de zéro, la courbe se trouve tout entière d'un même côté du rayon OA mené sous l'angle α, et le signe de la fonction

$$\frac{F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_\omega(a, \alpha)}$$

indique de quel côté se trouve la courbe. La formule qui nous donne la somme $\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}$ nous montre que cette somme est finie; par suite, comme V_1 et V_2 tendent vers zéro, ils sont de signes contraires.

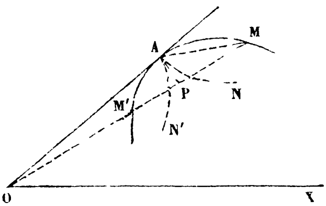
Si

$$\frac{F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_\omega(a, \alpha)} > 0,$$

la courbe a la forme représentée (*fig.* 9).

On obtient une branche MAM' tangente à OA et non

Fig. 9.



une branche analogue à NAN', car, dans le triangle PAM obtenu en prenant OP = OA, le rapport $\frac{AP}{PM}$ a pour limite zéro quand ε tend lui-même vers zéro.

Si $F'_\omega(a, \alpha)$ est nul en même temps que $F'_u(a, \alpha)$, le point $u = a$, $\omega = \alpha$ est un point double.

Dans ce cas, l'équation

$$F'_\omega + u' F'_u = 0$$

devient une identité pour $u = a$, $\omega = \alpha$; mais la suivante, à savoir

$$F''_{\omega^2} + 2u' F''_{\omega u} + u'^2 F''_{u^2} = 0,$$

donne, dans ce cas, les valeurs de u' au nombre de 2.

L'équation suivante

$$F'''_{\omega^3} + 3u' F'''_{\omega^2 u} + 3u'^2 F'''_{\omega u^2} + u'^3 F'''_{u^3} + 3u''(F''_{u\omega} + u' F''_{u^2}) = 0$$

donne la valeur de u'' correspondant à chaque valeur de u'.

La méthode indiquée pour traiter le cas où

$$F'_u(a, x) = 0$$

peut s'appliquer à la discussion générale. Mais nous ne l'exposerons pas ici, et nous allons passer à la construction de la courbe autour de ses points à l'infini.

(A suivre.)