NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Théorie élémentaire des séries récurrentes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 65-90

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__65_0>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES SÉRIES RÉCURRENTES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

I. — *Introduction.*

1. Le but du présent Mémoire est l'étude, par une méthode élémentaire, des séries définies par la loi de récurrence

$$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2} + \ldots + lU_{n-p},$$

et les valeurs des *termes initiaux* $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$, supposées d'ailleurs *absolument quelconques.*

Nous faisons voir que les valeurs des termes d'une pareille série se déduisent des termes d'une autre série que nous appelons *fondamentale* et qui s'obtient en conservant la même loi de récurrence, mais en adoptant pour les termes initiaux les valeurs $U_0 = 0$, $U_1 = 0, \ldots,$ $U_{p-2} = 0$, $U_{p-1} = 1$.

Quant aux termes de cette série fondamentale, nous les obtenons très simplement par l'emploi d'un algorithme, qui a fait l'objet d'une de nos Notes dans les *Nouvelles Annales* (¹), et sur lequel nous avons pensé qu'il serait bon de donner de nouveau quelques explications succinctes; aussi le n° II du Mémoire est-il consacré à un résumé des propriétés de la fonction que représente cet algorithme.

L'introduction de cet algorithme n'a pas pour but, sauf dans le cas du deuxième degré, de calculer *pratique-*

(¹) 3ᵉ série, t. II, p. 230.

ment les termes de la série, mais de les mettre sous une forme qui se prête facilement à établir certaines formules relatives à ces termes, et à opérer certaines transformations algébriques auxquelles ils donnent lieu.

Nous suivons, dans la rédaction de ce Mémoire, l'ordre même dans lequel nous sommes arrivé aux divers résultats que nous énonçons.

Nous n'avions d'abord traité la question que dans le cas d'une formule de récurrence à deux termes

$$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}.$$

Aussi commencerons-nous par faire une étude spéciale des séries de ce genre. La simplicité du problème conduit, dans ce cas, à des résultats intéressants qu'il n'est peut-être pas mauvais de signaler à part. Cette première étude permet d'ailleurs de saisir plus facilement la méthode employée dans le cas général.

Nous avons présenté notre travail à M. Désiré André qui a, dans une Thèse remarquable, traité la question des séries récurrentes dans sa plus grande généralité. La plupart de nos résultats ne sont probablement que des réductions de ses formules très générales; il ne serait pas toujours facile de s'en assurer. M. André a bien voulu, cependant, nous engager à publier notre travail, qui peut avoir quelque intérêt, comme cas particulier, et qui, d'ailleurs, contient plusieurs formules nouvelles.

Les n^{os} XIII, XIV et XV sont consacrés à des applications.

II. — *Définition et propriétés de* $[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}$.

2. Considérons le développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance du polynôme $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$; ce développement se

compose de termes de la forme

$$K a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_p^{\alpha_p},$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$ étant égal à m et K étant un coefficient dont on connaît la loi. Dans ce développement, remplaçons tous les coefficients K par l'unité, et représentons la fonction de $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ainsi obtenue à l'aide de la notation

$$[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}.$$

3. Cette fonction jouit des propriétés exprimées par les égalités suivantes :

$$(1)\quad [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = [a_1 a_2 \ldots a_{p-1}]^{(m)} + a_p [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m-1)},$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & [a_2 a_3 \ldots a_p a_{p+1}]^{(m)} - [a_1 a_2 a_3 \ldots a_p]^{(m)} \\ & \quad = (a_{p+1} - a_1)[a_1 a_2 a_3 \ldots a_p a_{p+1}]^{(m-1)}, \end{aligned} \right.$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & [a_1 a_2 \ldots a_{p-1} a_p]^{(m)} \\ & \quad = [a_1 a_2 \ldots a_{p-1}]^{(m)} + a_p [a_1 a_2 \ldots a_{p-1}]^{(m-1)} \\ & \qquad + a_p^2 [a_1 a_2 \ldots a_{p-1}]^{(m-2)} + \ldots + a_p^m [a_1 a_2 \ldots a_{p-1}]^{(0)}. \end{aligned} \right.$$

Il y a lieu de remarquer que, comme pour la fonction exponentielle, la valeur de $[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}$, pour $m = 0$, sera prise égale à 1.

La démonstration de ces formules est des plus aisées; on établit la première en mettant à part tous les termes contenant a_p, puis évaluant les deux parties ainsi formées dans $[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}$; les deux autres formules s'en déduisent immédiatement.

4. Nous avons aussi démontré, dans la Note citée plus haut, que si l'on pose

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_p) \\ &= x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x + A_p, \end{aligned}$$

on a

$$(4)\quad [a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} = \sum \frac{a^{p-1+m}}{f'(a)},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$ supposées réelles et inégales.

5. Enfin, on trouve dans la même Note, la formule

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^p} + \frac{[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(1)}}{x^{p+1}} + \ldots + \frac{[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)}}{x^{p+m}} + \ldots;$$

multipliant les deux membres par $f(x)$, on a dès lors, en identifiant, la relation générale

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m)} + A_1[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m-1)} + \ldots \\ &\qquad + A_p[a_1 a_2 \ldots a_p]^{(m-p)} = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est cette formule qui va servir de point de départ à notre étude.

III. — *Calcul du terme u_n de la série définie par la loi de récurrence $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ avec les conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.*

6. Remarquons d'abord que

$$u_2 = au_1 + bu_0 = a.$$

Cela dit, considérons l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Si α et β désignent les racines de cette équation, on a, d'après la formule (5),

$$[\alpha\beta]^{(n)} - a[\alpha\beta]^{(n-1)} - b[\alpha\beta]^{(n-2)} = 0$$

ou

$$[\alpha\beta]^{(n)} = a[\alpha\beta]^{(n-1)} + b[\alpha\beta]^{(n-2)}.$$

Les quantités $[\alpha\beta]^{(n)}$ suivent donc la même loi de récurrence que les quantités u_n ; d'ailleurs

$$[\alpha\beta]^{(0)} = 1 = u_1,$$
$$[\alpha\beta]^{(1)} = \alpha + \beta = a = u_2,$$

par conséquent

$$(6) \qquad u_n = [\alpha\beta]^{(n-1)}.$$

Nous avons ainsi très simplement la valeur cherchée : nous pouvons la transformer.

7. En effet, d'après la formule (2), nous avons

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)[\alpha\beta]^{(n-1)},$$

d'où

$$(7) \qquad u_n = [\alpha\beta]^{(n-1)} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

8. Si, dans la formule (7), nous remplaçons α et β par leurs valeurs en fonction de a et b, et si nous développons, nous arrivons, après des calculs dont le détail est tout à fait dépourvu d'intérêt, au résultat suivant :

$2p$ désignant le plus grand nombre pair inférieur à n, de telle façon que

$$n = 2p + 1, \quad \text{si } n \text{ est impair,}$$
$$n = 2p + 2, \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

on a

$$(8) \left\{ \begin{aligned} u_n = a^{n-1} + \frac{n-2}{1} a^{n-3} b + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} a^{n-5} b^2 + \ldots \\ + \frac{(n-[p+1])\ldots(n-2p)}{1.2\ldots p} a^{n-(2p+1)} b^p. \end{aligned} \right.$$

C'est cette formule [1] qu'il conviendrait d'appliquer, dans la pratique, si α et β étaient incommensurables.

---

[1] On trouve cette formule dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XX, p. 257), mais avec une démonstration légèrement erronée.

IV. — *Somme des n premiers termes de la série précédente; limite de cette somme.*

9. Nous ne tenons pas compte du terme u_0, qui est nul; la somme que nous voulons évaluer est

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

D'après la formule (6), on a

$$S_n = [\alpha\beta]^{(0)} + [\alpha\beta]^{(1)} + \ldots + [\alpha\beta]^{(n-1)}:$$

or la formule (3) donne

$$[\alpha\beta 1]^{(n-1)} = [\alpha\beta]^{(n-1)} + [\alpha\beta]^{(n-2)} + \ldots + [\alpha\beta]^{(0)}:$$

donc

$$S_n = [\alpha\beta 1]^{(n-1)}. \tag{9}$$

10. Nous pourrons donner à cette expression une forme plus commode pour le calcul, si α et β sont différents de 1, en posant

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (x-1)(x-\alpha)(x-\beta)\\ &= (x-1)(x^2-ax-b).\end{aligned}$$

Par application de la formule (4), on a

$$S_n = [\alpha\beta 1]^{(n-1)} = \frac{\alpha^{n+1}}{\varphi'(\alpha)} + \frac{\beta^{n+1}}{\varphi'(\beta)} + \frac{1}{\varphi'(1)}. \tag{10}$$

11. Si α et β sont inférieurs à l'unité, la somme S_n, pour n croissant indéfiniment, a une limite que nous représentons par S, et nous aurons

$$S = \frac{1}{\varphi'(1)} = \frac{1}{1-(a+b)}. \tag{11}$$

V. — *Calcul du terme* U_n *de la série définie par la loi de récurrence* $U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$, U_0 *et* U_1 *étant absolument quelconques.*

12. Nous appellerons *série fondamentale* de cette série celle qu'on obtient en conservant les mêmes valeurs de a et de b, et en prenant $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, et nous la représenterons par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, u_2, ..., u_n, ...

Posons, d'une manière générale, pour toute valeur de n,

$$U_n - U_1 u_n = V_n.$$

On a

$$V_n = aV_{n-1} + bV_{n-2}.$$

D'ailleurs, par définition,

$$V_0 = U_0 - U_1 u_0 = U_0,$$
$$V_1 = U_1 - U_1 u_1 = 0,$$

et, par conséquent,

$$V_2 = aV_1 + bV_0 = bU_0.$$

Écrivons alors les égalités qui lient les quantités V, en les divisant par bU_0,

$$\frac{V_n}{bU_0} = a\frac{V_{n-1}}{bU_0} + b\frac{V_{n-2}}{bU_0}.$$

Comme nous avons

$$\frac{V_1}{bU_0} = 0 = u_0,$$
$$\frac{V_2}{bU_0} = 1 = u_1,$$

nous en déduisons

$$\frac{V_n}{bU_0} = u_{n-1}.$$

Par suite,

$$U_n = U_1 u_n + V_n = U_1 u_n + bU_0 u_{n-1}. \tag{12}$$

Nous avons ainsi l'expression d'un terme quelconque de la série en fonction des termes de la série fondamentale.

13. Transformons cette expression à l'aide de la formule (6); cela nous donne

$$(13) \qquad U_n = U_1[\alpha\beta]^{(n-1)} + b\,U_0[\alpha\beta]^{(n-2)},$$

α et β étant toujours les racines de l'équation

$$x^2 - ax - b = 0,$$

ou, en tenant compte de la formule (2),

$$(14) \qquad U_n = \frac{U_1(\alpha^n - \beta^n) + b\,U_0(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta}.$$

14. Prenons pour termes initiaux deux termes consécutifs de la série fondamentale u_{p-1} et u_p, de façon que

$$U_0 = u_{p-1},$$
$$U_1 = u_p,$$
$$U_n = u_{n+p-1}.$$

L'application de la formule (12) donne

$$(15) \qquad u_{n+p-1} = u_p u_n + b u_{p-1} u_{n-1}.$$

15. Faisons maintenant, dans la formule (15), $n = p$; nous avons

$$(16) \qquad u_{2p+1} = u_p^2 + b u_{p-1}^2.$$

En particulier, si $b = 1$,

$$u_{2p+1} = u_p^2 + u_{p-1}^2.$$

Donc, dans une série récurrente définie par

$$u_n = a u_{n-1} + u_{n-2},$$
$$u_0 = 0,$$
$$u_1 = 1,$$

la somme des carrés de deux termes consécutifs est égale au terme dont l'indice est la somme des indices des deux termes considérés.

VI. — *Somme des n premiers termes de la série précédente; limite de cette somme.*

16. Nous laissons le terme U_0; la somme que nous voulons évaluer est

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} U_n &= U_1[\alpha\beta]^{(n-1)} + b\,U_0[\alpha\beta]^{(n-2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_2 &= U_1[\alpha\beta]^{(1)} + b\,U_0[\alpha\beta]^{(0)}, \\ U_1 &= U_1[\alpha\beta]^{(0)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n = {} & U_1([\alpha\beta]^{(n-1)} + \ldots + [\alpha\beta]^{(1)} + [\alpha\beta]^{(0)}) \\ & + b\,U_0([\alpha\beta]^{(n-2)} + \ldots + [\alpha\beta]^{(0)}) \end{aligned}$$

ou

$$S_n = U_1[\alpha\beta 1]^{(n-1)} + b\,U_0[\alpha\beta 1]^{(n-2)}. \tag{17}$$

17. Posons, comme nous avons fait précédemment,

$$\varphi(x) = (x-1)(x^2 - ax - b).$$

Nous aurons, en supposant α et β différents de 1,

$$\left\{ \begin{aligned} S_n = U_1 & \left[\frac{\alpha^{n+1}}{\varphi'(\alpha)} + \frac{\beta^{n+1}}{\varphi'(\beta)} + \frac{1}{\varphi'(1)}\right] \\ & + b\,U_0\left[\frac{\alpha^n}{\varphi'(\alpha)} + \frac{\beta^n}{\varphi'(\beta)} + \frac{1}{\varphi'(1)}\right]. \end{aligned} \right. \tag{18}$$

18. Si α et β sont inférieurs à l'unité, et si S désigne la limite de S_n, pour n croissant indéfiniment, nous avons

$$S = \frac{U_1 + b\,U_0}{\varphi'(1)}$$

ou

$$S = \frac{U_1 + bU_0}{1 - (a+b)}. \tag{19}$$

19. La comparaison des formules (11) et (19) conduit à une remarque assez curieuse : si $U_1 + bU_0$ est égal à 1, la limite de la somme de la série est la même que celle de sa série fondamentale.

VII. — *Application aux séries définies par*

$$X_n = a(X_{n-1} - X_{n-2}) + c,$$

et les valeurs initiales X_0 *et* X_1.

20. Cherchons la valeur de X_n en fonction de X_0, X_1 a et c.

A cet effet, considérons la série donnée par la loi

$$x_n = a(x_{n-1} - x_{n-2}),$$

avec les conditions initiales $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et posons

$$X_n - x_n - c = Y_n.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} X_n - x_n - c &= a(X_{n-1} - X_{n-2}) - a(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= a(X_{n-1} - x_{n-1}) - a(X_{n-2} - x_{n-2}) \\ &= a(X_{n-1} - x_{n-1} - c) - a(X_{n-2} - x_{n-2} - c) \end{aligned}$$

ou

$$Y_n = a(Y_{n-1} - Y_{n-2}).$$

La série fondamentale de la série définie par cette relation est la série des quantités x_n. Nous avons donc, d'après la formule (12),

$$Y_n = Y_1 x_n - aY_0 x_{n-1}$$

ou

$$X_n - x_n - c = (X_1 - x_1 - c)x_n - a(X_0 - x_0 - c)x_{n-1};$$

d'où, puisque $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$,

$$X_n = (X_1 - c)x_n - a(X_0 - c)x_{n-1} + c, \tag{20}$$

ou, si α et β sont les racines de l'équation

$$x^2 - ax + a = 0,$$

$$X_n = (X_1 - c)[\alpha\beta]^{(n-1)} - a(X_0 - c)[\alpha\beta]^{(n-2)} + c.$$

Si $a = 1$ et $X_0 = X_1 = c + 1$, la formule (20) devient

$$X_n = x_{n+1} + c.$$

VIII. — *Application au calcul des réduites de la fraction continue*

$$z = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}$$

21. Considérons la série récurrente définie par

$$u_n = au_{n-1} + u_{n-2},$$

avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

En désignant par

$$z_n = \frac{p_n}{q_n}$$

la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue donnée, on a

$$p_n = ap_{n-1} + p_{n-2},$$
$$q_n = aq_{n-1} + q_{n-2}.$$

D'ailleurs, en prenant, comme c'est l'habitude, la réduite initiale fictive $\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0}$, on a

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 0,$$
$$p_1 = a, \quad q_1 = 1.$$

Comparant à la série définie ci-dessus, on voit que

$$p_n = u_{n+1},$$
$$q_n = u_n,$$

donc

$$z_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

22. D'après la formule (7), en appelant α et β les racines de l'équation

$$z^2 - az - 1 = 0,$$

on aura

$$z_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}, \tag{21}$$

dont la limite, pour n croissant indéfiniment, est bien α, valeur de la fraction continue.

IX. — *Calcul du terme u_n de la série définie par la loi de récurrence $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} + \ldots + lu_{n-p}$, avec les conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, ..., $u_{p-2} = 0$, $u_{p-1} = 1$.*

23. Considérons l'équation

$$x^p - ax^{p-1} - bx^{p-2} - \ldots - l = 0.$$

D'après la formule (5), nous avons, en appelant α_1, α_2, ..., α_p les racines de cette équation,

$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m)} - a[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m-1)} - \ldots \\ - l[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m-p)} = 0$$

ou

$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m)} = a[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m-1)} + \ldots \\ + l[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m-p)}.$$

De plus, on a

$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)} = 1 = u_{p-1},$$
$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(1)} = a[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)} = au_{p-1} = u_p,$$
$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(2)} = a[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(1)} + b[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)} \\ = au_p + bu_{p-1} = u_{p+1},$$

et ainsi de suite.

On voit donc que

$$[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(m)} = u_{m+p-1};$$

donc

(22) $$u_n = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-p+1)}.$$

24. Si toutes les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont réelles et inégales, et si l'on pose

$$\varphi(x) = x^p - ax^{p-1} - \ldots - l,$$

on a, d'après la formule (4),

(23) $$u_n = \frac{\alpha_1^n}{\varphi'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^n}{\varphi'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{\alpha_p^n}{\varphi'(\alpha_p)}.$$

X. — *Somme d'un nombre fini de termes de la série précédente; limite de cette somme.*

25. Nous n'avons pas à tenir compte des termes u_0, u_1, u_2, ..., u_{p-2}, qui sont nuls. La somme que nous voulons évaluer est

$$S_n = u_{p-1} + u_p + \ldots + u_n,$$

ou

$$S_n = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)} + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(1)} + \ldots + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-p+1)}.$$

L'application de la formule (3) donne

(24) $$S_n = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p\, 1]^{n-p+1}.$$

26. Si l'on pose

$$\psi(x) = \varphi(x)(x-1),$$

la formule (4) permet d'écrire, en supposant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ différents de 1,

$$S_n = \frac{\alpha_1^{n+1}}{\psi'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^{n+1}}{\psi'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{\alpha_p^{n+1}}{\psi'(\alpha_p)} + \frac{1}{\psi'(1)}.$$

Dès lors, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont inférieurs à l'unité, S_n a, pour n croissant indéfiniment, une limite donnée par

$$S = \frac{1}{\psi'(1)}$$

ou

$$S = \frac{1}{1-(a+b+\ldots+l)}. \tag{25}$$

XI. — *Calcul du terme* U_n *de la série définie par la loi de récurrence* $U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2} + \ldots + lU_{n-p}$, $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$ *étant absolument quelconques.*

27. Représentons la série fondamentale de la série donnée par

$$\begin{aligned} u_n &= au_{n-1} + bu_{n-2} + \ldots + lu_{n-p}, \\ u_0 &= 0, \\ u_1 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_{p-2} &= 0, \\ u_{p-1} &= 1, \end{aligned}$$

et posons, par analogie avec ce qui a été fait au n° 12,

$$U_n - \lambda U_{p-1} u_{n+p-2} - \mu U_{p-2} u_{n+p-3} - \ldots - \theta U_1 u_n = V_n, \tag{α}$$

$\lambda, \mu, \ldots, \theta$ étant des coefficients actuellement indéterminés.

Nous aurons

$$V_0 = U_0 - \lambda U_{p-1} u_{p-2} = U_0, \tag{β}$$

et nous déterminerons les coefficients $\lambda, \mu, \ldots, \theta$, au nombre de $p-1$, par les conditions

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 - \lambda U_{p-1} u_{p-1} = 0, \\ V_2 &= U_2 - \lambda U_{p-1} u_p - \mu U_{p-2} u_{p-1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{p-1} &= U_{p-1} - \lambda U_{p-1} u_{2p-3} - \ldots - \theta U_1 u_{p-1} = 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs, ce ne sont pas précisément les quantités λ, μ, ..., θ dont nous avons besoin, mais bien les quantités λU_{p-1}, λU_{p-2}, ..., θU_1 ; ce sont donc celles-ci que nous prendrons pour inconnues. Dans ces conditions, u_{p-1} étant égal à 1, le déterminant de ce système d'équations se réduit lui-même à 1.

Dès lors, nous pourrons tirer de ce système d'équations linéaires les valeurs de λU_{p-1}, μU_{p-2}, ..., θU_1, et nous les porterons dans la valeur (α) de V_n. Si nous remarquons d'ailleurs que

$$(\gamma) \qquad V_n = aV_{n-1} + bV_{n-2} + \ldots + lV_{n-p},$$

nous aurons

$$V_p = aV_{p-1} + bV_{p-2} + \ldots + lV_0 = lV_0,$$

ou, d'après (β),

$$V_p = lU_0.$$

Écrivons alors l'égalité (γ), en divisant ses deux membres par lU_0,

$$\frac{V_n}{lU_0} = a\frac{V_{n-1}}{lU_0} + b\frac{V_{n-2}}{lU_0} + \ldots + l\frac{V_{n-p}}{lU_0}.$$

Comme on a, d'ailleurs,

$$\frac{V_1}{lU_0} = 0 = u_0,$$

$$\frac{V_2}{lU_0} = 0 = u_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{V_{p-1}}{lU_0} = 0 = u_{p-2},$$

$$\frac{V_p}{lU_0} = 1 = u_{p-1};$$

on voit que

$$\frac{V_n}{lU_0} = u_{n-1}$$

et

$$V_n = lU_0 u_{n-1}.$$

Par suite, la formule (α) donne

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} U_n = \lambda U_{p-1} u_{n+p-2} + \mu U_{p-2} u_{n+p-3} + \ldots \\ + \theta U_1 u_n + l U_0 u_{n-1}, \end{aligned}\right.$$

λ, μ, ..., θ ayant les valeurs qui ont été déterminées précédemment. Telle est la généralisation de la formule (12).

Nous pourrons donc, en posant

$$\lambda U_{p-1} = \lambda', \quad \mu U_{p-2} = \mu', \quad \ldots, \quad \theta U_1 = \theta',$$

énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Un terme quelconque* U_n *est une fonction linéaire et homogène de* p *termes consécutifs de la série fondamentale, pris à partir de* u_{n-1}, *y compris ce terme*

$$U_n = \lambda' u_{n+p-2} + \mu' u_{n+p-3} + \ldots + \theta' u_n + l U_0 u_{n-1},$$

fonction dont les $p-1$ *coefficients* λ', μ', ..., θ' *sont déterminés par le système d'équations que l'on obtient en faisant successivement dans la formule précédente* $n = 1, 2, 3, \ldots, p-1$.

28. Si nous appelons toujours α_1, α_2, ..., α_p les racines de l'équation

$$\varphi(x) = x^p - a x^{p-1} - \ldots - l = 0,$$

la formule (22) nous permet d'écrire

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} U_n = \lambda U_{p-1} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-1)} \\ + \mu U_{p-2} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-2)} + \ldots \\ + l U_0 [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-p)}. \end{aligned}\right.$$

29. Si l'on prend pour termes initiaux p termes consécutifs de la série fondamentale, de façon que

$$U_0 = u_{m-1}, \quad U_1 = u_m, \quad \ldots, \quad U_{p-2} = u_{m+p-3}, \quad U_{p-1} = u_{m+p-2}$$

et

$$U_n = u_{n+m-1},$$

on a

$$u_{n+m-1} = \lambda u_{m+p-2} u_{n+p-2} + \mu u_{m+p-3} u_{n+p-3} + \ldots \\ + \theta u_m u_n + l u_{m-1} u_{n-1},$$

qu'il est plus rationnel d'écrire, en augmentant m et n d'une unité,

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_{n+m+1} &= \lambda u_{m+p-1} u_{n+p-1} + \ldots \\ &\quad + \theta u_{m+1} u_{n+1} + l u_m u_n. \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait $m = n$, on a

$$(29) \qquad u_{2n+1} = \lambda u_{n+p-1}^2 + \mu u_{n+p-2}^2 + \ldots + \theta u_{n+1}^2 + l u_n^2.$$

XII. — *Somme des n premiers termes de la série précédente ; limite de cette somme.*

30. Nous laissons de côté le terme U_0 ; la somme que nous voulons évaluer est

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$

Or, nous avons, d'après la formule (27),

$$U_n = \lambda U_{p-1} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-1)} + \mu U_{p-2} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-2)} + \ldots, \\ + l U_0 [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-p)},$$

. . . . ,

$$U_p = \lambda U_{p-1} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(p-1)} + \mu U_{p-2} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(p-2)} + \\ + l U_0 [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)},$$

. . . . ,

$$U_1 = \lambda U_{p-1} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n = {} & \lambda U_{p-1} ([\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-1)} + \ldots + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)}) \\ & + \mu U_{p-2} ([\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-2)} + \ldots + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \quad + l U_0 ([\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(n-p)} + \ldots + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p]^{(0)}), \end{aligned}$$

ou, d'après la formule (3),

$$(30)\quad \begin{cases} S_n = \lambda U_{p-1}[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p 1]^{(n-1)} \\ \qquad + \mu U_{p-2}[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p 1]^{(n-2)} + \ldots \\ \qquad\qquad + l U_0[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p 1]^{(n-p)}. \end{cases}$$

31. Si nous posons encore

$$\psi(x) = \varphi(x)(x-1),$$

la formule (4) nous permettra d'écrire, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant supposés différents de 1,

$$(31)\quad \begin{cases} S_n = \lambda U_{p-1}\left[\dfrac{\alpha_1^{p+n-1}}{\psi'(\alpha_1)} + \ldots + \dfrac{\alpha_p^{p+n-1}}{\psi'(\alpha_p)} + \dfrac{1}{\psi'(1)}\right] \\ \quad + \mu U_{p-2}\left[\dfrac{\alpha_1^{p+n-2}}{\psi'(\alpha_1)} + \ldots + \dfrac{\alpha_p^{p+n-2}}{\psi'(\alpha_p)} + \dfrac{1}{\psi'(1)}\right] \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + l U_0\left[\dfrac{\alpha_1^{n}}{\psi'(\alpha_1)} + \ldots + \dfrac{\alpha_p^{n}}{\psi'(\alpha_p)} + \dfrac{1}{\psi'(1)}\right]; \end{cases}$$

et, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont inférieurs à l'unité, S_n, pour n croissant indéfiniment, aura une limite S qui sera donnée par

$$S = \frac{\lambda U_{p-1} + \mu U_{p-2} + \ldots + \theta U_1 + l U_0}{\psi'(1)}$$

ou

$$(32)\qquad S = \frac{\lambda U_{p-1} + \mu U_{p-2} + \ldots + \theta U_1 + l U_0}{1-(a+b+\ldots+l)}.$$

Si donc

$$\lambda U_{p-1} + \mu U_{p-2} + \ldots + \theta U_1 + l U_0 = 1,$$

la série aura même somme que sa série fondamentale.

Applications.

XIII. — *Cas particulier de la série définie par*

$$U_n = p U_{n-1} - \frac{p(p-1)}{1.2} U_{n-2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} U_{n-3} + \ldots \pm U_{n-p},$$

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 0, \quad \ldots, \quad U_{p-2} = 0, \quad U_{p-1} = 1.$$

32. Dans ce cas, l'équation résolvante est

$$x^p - px^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2} - \ldots \pm 1 = 0$$

ou

$$(x-1)^p = 0.$$

On a donc, d'après la formule (22) (IX, 23),

$$U_n = [1, 1, \ldots, 1]^{(n-p+1)}.$$

Mais, si nous nous reportons à la définition donnée (II, 2), nous voyons que $[1, 1, \ldots, 1]^{(n-p+1)}$ n'est autre que le nombre des termes du développement de

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^{n-p+1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(n-p+2)(n-p+3)\ldots(n-1)n}{1.2\ldots(p-2)(p-1)}$$

ou

$$C_n^{p-1};$$

donc

$$U_n = C_n^{p-1}.$$

33. Appliquons maintenant la formule (24) (X, 25); elle nous donne

$$U_{p-1} + U_p + \ldots + U_n = [1, 1, \ldots, 1\,1]^{(n-p+1)},$$

les 1 étant cette fois en nombre $(p+1)$ dans la parenthèse; nous aurons, par une remarque analogue à la précédente,

$$[1\,1 \ldots 1\,1]^{(n-p+1)} = C_n^p,$$

ce qui nous conduit au résultat bien connu

$$C_{p-1}^{p-1} + C_p^{p-1} + \ldots + C_n^{p-1} = C_n^p.$$

Nous avons ainsi une verification de nos formules.

XIV. — *Séries définies par la formule*

$$U_n = a_0 U_{n-1} + a_1 U_{n-2} + \ldots + a_{n-2} U_1 + a_{n-1} U_0$$

et par la valeur de U_0; $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ *étant les termes successifs d'une progression soit géométrique, soit arithmétique.*

On voit que ces séries ne sont pas du genre de celles que nous avons envisagées jusqu'ici, puisque, maintenant, le nombre des termes de la formule de récurrence augmente d'un terme à l'autre de la série.

34. Supposons d'abord que $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ soient les termes successifs d'une progression géométrique de raison q, de telle sorte que

$$a_n = a_0 q^n.$$

Dans ce cas, la recherche du terme U_n ne présente aucune difficulté. En effet, on a

$$\begin{aligned} U_{n-1} &= a_0 U_{n-2} + a_1 U_{n-3} + \ldots + a_{n-3} U_1 + a_{n-2} U_0, \\ U_n &= a_0 U_{n-1} + a_1 U_{n-2} + \ldots + a_{n-3} U_2 + a_{n-2} U_1 + a_{n-1} U_0. \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de la première de ces formules par q et retranchons-la de la seconde; nous avons

$$U_n - q U_{n-1} = a_0 U_{n-1}$$

ou

$$U_n = (a_0 + q) U_{n-1}.$$

Les termes de la série sont donc les termes successifs d'une progression géométrique de raison $a_0 + q$ et de premier terme U_1, par suite

$$U_n = (a_0 + q)^{n-1} U_1. \tag{33}$$

La somme d'un nombre fini de termes sera

$$S_n = U_1 \frac{1 - (a_0 + q)^n}{1 - (a_0 + q)},$$

et, si $a_0 + q$ est inférieur à l'unité, cette somme, pour n croissant indéfiniment, aura une limite

$$S = \frac{U_1}{1 - (a_0 + q)} = \frac{a_0 U_0}{1 - (a_0 + q)}.$$

La formule (33) conduit à cette remarque curieuse, que, dans une série définie par

$$U_n = a_0 U_{n-1} + a_0 q U_{n-2} + \ldots + a_0 q^{n-2} U_1 + a_0 q^{n-1} U_0,$$

tous les termes sont égaux, sauf U_0, si $a_0 + q = 1$.

35. Supposons maintenant que $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ soient les termes successifs d'une progression arithmétique de raison r, de telle sorte que

$$a_n = a_0 + nr.$$

La recherche du terme U_n est alors un peu plus difficile. Nous avons

$$U_n = a_0 U_{n-1} + a_1 U_{n-2} + \ldots + a_{n-2} U_1 + a_{n-1} U_0,$$
$$U_{n-1} = a_0 U_{n-2} + a_1 U_{n-3} + \ldots + a_{n-2} U_0.$$

Aux deux membres de cette dernière égalité, ajoutons

$$r S_{n-2} = r U_{n-2} + r U_{n-3} + \ldots + r U_1 + r U_0,$$

nous aurons

$$U_{n-1} + r S_{n-2} = a_1 U_{n-2} + a_2 U_{n-3} + \ldots + a_{n-2} U_1 + a_{n-1} U_0.$$

Retranchons cette égalité membre à membre de la première, cela nous donne

$$U_n - U_{n-1} - r S_{n-2} = a_0 U_{n-1}$$

ou

$$U_n = (a_0 + 1) U_{n-1} + r S_{n-2}.$$

On aurait de même

$$U_{n-1} = (a_0 + 1) U_{n-2} + r S_{n-3}.$$

Retranchant la seconde de ces égalités de la première, et remarquant que $S_{n-2} - S_{n-3} = U_{n-2}$, nous avons

$$U_n - U_{n-1} = (a_0 - 1)U_{n-1} - (a_0 + 1)U_{n-2} + rU_{n-2}$$

ou

$$(34) \qquad U_n = (a_0 + 2)U_{n-1} - (a_0 + 1 - r)U_{n-2};$$

comme, d'ailleurs, on a U_0 et que $U_1 = a_0 U_0$, on retombe sur le cas étudié au § V, et l'on sait, par suite, calculer U_n.

Représentant par la lettre u les termes de la série fondamentale correspondante, on a, d'après la formule (22) (V, 12),

$$(35) \qquad U_n = a_0 U_0 u_n - (a_0 + 1 - r)U_0 u_{n-1},$$

et l'on sait obtenir u_n et u_{n-1} en fonction soit des racines, soit des coefficients de l'équation

$$x^2 - (a_0 + 2)x + (a_0 + 1 - r) = 0$$

par l'une des formules (6), (7) ou (8) (III).

36. Supposons que

$$a_0 = -\eta,$$

η étant positif et plus petit que 1, et que

$$r = 1 - \zeta,$$

ζ étant plus petit que 1 et plus grand que η. Dans ce cas, l'équation a ses deux racines réelles et inégales, car

$$B^2 - 4AC = a_0^2 - 4r = \eta^2 + 4 - 4\zeta,$$

qui est positif. D'ailleurs, la somme des racines

$$a_0 - 2 = 2 - \eta$$

est comprise entre 0 et 2; leur produit

$$a_0 - 1 - r = \zeta - \eta$$

est compris entre 0 et 1; ces deux racines sont donc elles-mêmes comprises entre o et 1. La série est, par suite, convergente, et elle a une somme donnée, d'après la formule (19) (VI, 18), par

$$S = \frac{a_0 U_0 - (a_0 + 1 - r) U_0}{1 - (a_0 + 2) - (a_0 + 1 - r)} = \frac{-(1 - r) U_0}{-r} = \frac{\zeta U_0}{1 - \zeta}.$$

Il est très remarquable que cette somme est indépendante de la valeur de a_0.

XV. — *Séries définies par la formule*

$$U_n = a U_{n-1} + b U_{n-2} + \ldots + l U_{n-p} + m$$

et les valeurs des termes initiaux $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$.

37. Traitons d'abord le cas où tous les termes initiaux $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$ sont nuls.

Posant $\frac{U_n}{m} = U'_n$, nous avons

$$U'_n = a U'_{n-1} + b U'_{n-2} + \ldots + l U'_{n-p} + 1.$$

Si l'on pose aussi $U'_n - U'_{n-1} = V_{n-1}$, on a, en retranchant l'une de l'autre les formules qui donnent les valeurs de U'_{n-1} et U'_n,

$$V_{n-1} = a V_{n-2} + b V_{n-3} + \ldots + l V_{n-p-1};$$

d'ailleurs

$$V_0 = 0, \quad V_1 = 0, \quad \ldots, \quad V_{p-2} = 0, \quad V_{p-1} = 1 :$$

donc, d'après la formule (24) (X, 25),

$$V_{p-1} + V_p + \ldots + V_{n-1} = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p 1]^{(n-p)}.$$

Or

$$U'_n = V_{p-1} + V_p + \ldots + V_{n-1};$$

par suite,

$$U'_n = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p 1]^{(n-p)},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ étant les racines de l'équation

$$x^p - a x^{p-1} - \ldots - l = 0.$$

La valeur de U_n sera, par conséquent,

$$(36) \qquad U_n = m\,[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p\, 1]^{(n-p)}.$$

38. Nous pourrons faire la remarque suivante : prenons la série définie par

$$\begin{gathered} U''_n = (a+1)\,U''_{n-1} + (b-a)\,U''_{n-2} + (c-b)\,U''_{n-3} + \ldots \\ + (l-h)\,U''_{n-p} - l\,U''_{n-p-1}, \\ U''_0 = 0, \quad U''_1 = 0, \quad \ldots, \quad U''_{p-1} = 0, \quad U''_p = 1, \end{gathered}$$

dont l'équation résolvante a pour racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et 1 ; nous aurons, par la formule (22) (IX, 23),

$$U''_n = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p\, 1]^{(n-p)};$$

par suite,

$$U''_n = U'_n.$$

39. Pour avoir la somme d'un certain nombre de termes, nous écrirons

$$(37) \left\{ \begin{aligned} S_n &= U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n \\ &= m \left\{ [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p\, 1]^{(0)} + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p\, 1]^{(1)} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p\, 1]^{(n-p)} \right\} \\ &= m\,[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p\, 1\, 1]^{(n-p)}. \end{aligned} \right.$$

40. Il ne nous reste plus qu'à faire voir comment le cas où les valeurs initiales $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$ sont quelconques se ramène au précédent. La transformation est tout à fait analogue à celle que nous avons déjà employée (XI, 27).

Représentant par la lettre u les termes de la série fondamentale (pour laquelle $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\ldots$, $u_{p-1} = 0$), nous poserons

$$U_n - \lambda\, u_{n+p} - \mu\, u_{n+p-1} - \ldots - \theta\, u_{n+1} = V_n,$$

$\lambda, \mu, \ldots, \theta$, au nombre de p, étant déterminé par le système d'équations

$$\begin{aligned}
V_0 &= U_0 - \lambda u_p = 0,\\
V_1 &= U_1 - \lambda u_{p+1} - \mu u_p = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
V_{p-1} &= U_{p-1} - \lambda u_{2p-1} - \mu u_{2p-2} - \dots - \theta u_p = 0,
\end{aligned}$$

dont le déterminant se réduit à u_p^p, qui est différent de zéro. Écrivons

$$\begin{aligned}
U_n &= a U_{n-1} + b U_{n-2} + \dots + l U_{n-p} + m,\\
u_{n+p} &= a u_{n+p-1} + b u_{n+p-2} + \dots + l u_n + m,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
u_{n+1} &= a u_n + b u_{n-1} + \dots + l u_{n+1-p} + m.
\end{aligned}$$

Multiplions la première de ces égalités par 1, la deuxième par $-\lambda$, ..., la dernière par $-\theta$, et faisons la somme; nous avons

$$V_n = a V_{n-1} + b V_{n-2} + \dots + l V_{n-p} + m(1 - \lambda - \dots - \theta)$$

ou, en posant $\dfrac{V_n}{1-(\lambda+\dots+\theta)} = V'_n$ et supposant

$$\lambda + \mu + \dots + \theta$$

différent de 1,

$$V'_n = a V'_{n-1} + b V'_{n-2} + \dots + V'_{n-p} + m,$$

et, comme

$$V'_0 = 0, \quad V'_1 = 0, \quad \dots, \quad V'_{p-1} = 0,$$

on voit que

$$V'_n = u_n.$$

Par suite,

$$V_n = (1 - \lambda - \mu - \dots - \theta) u_n$$

et

$$(38) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_n &= \lambda u_{n+p} + \mu u_{n+p-1} + \dots\\ &\quad + \theta u_{n+1} + (1 - \lambda - \mu - \dots - \theta) u_n. \end{aligned} \right.$$

41. Dans le cas où $p = 2$, c'est-à-dire où la formule de récurrence se réduit à

$$U_n = a U_{n-1} + b U_{n-2} + c,$$

on a

$$u_2 = c, \quad u_3 = (a - 1)c;$$

par suite, λ et μ sont donnés par

$$\begin{aligned} &U_0 - \lambda c = 0, \\ &U_1 - \lambda(a-1)c - \mu c = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda = \frac{U_0}{c},$$

$$\mu = \frac{U_1 - (a-1)U_0}{c}.$$

Donc, dans ce cas,

$$U_n = \frac{U_0}{c} u_{n+2} - \frac{U_1 - (a-1)U_0}{c} u_{n+1} - \left(1 - \frac{U_1}{c} + \frac{aU_0}{c}\right) u_n,$$

formule qu'on peut transformer en remarquant que

$$u_{n+2} = au_{n+1} - bu_n - c;$$

on trouve alors

$$(39)\quad U_n = \frac{U_1 - U_0}{c} u_{n+1} - \left[1 - \frac{U_1}{c} + \frac{(a-b)U_0}{c}\right] u_n + U_0.$$

Si l'on fait $U_1 = U_0 = c = b = a$, la formule se réduit à

$$(40)\qquad U_n = a(2u_n - 1).$$