NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Étude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles dans le plan : coordonnées parallèles et coordonnées axiales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 456-470

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__456_1>

ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES

(voir p. 10)

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

III. — COURBES EN GÉNÉRAL.

20. Nous ne ferons pas la théorie complète des courbes en u et v, qui est identiquement la même que celle des courbes en x et y lorsqu'on y permute les éléments point et droite.

Ainsi, le point de contact de la tangente (u_1, v_1) a pour équation

$$v - v_1 = \frac{dv_1}{du_1}(u - u_1),$$

et la recherche des tangentes à une courbe, issues d'un point donné, sera la même que celle des points de rencontre d'une courbe et d'une droite en coordonnées ordinaires. Nous n'avons pas à insister sur ces questions, qui rentrent dans le domaine des propriétés générales des systèmes de coordonnées tangentielles; mais nous devons faire ici quelques remarques spéciales au système qui nous occupe.

En premier lieu, remarquons que, les tangentes aux points de rencontre de la courbe $F(u, v) = 0$ et de la droite (u_1, v_1) étant données par la résolution du système d'équations

$$F(u, v) = 0, \quad u_1 F'_u + v_1 F'_v + F'_t = 0,$$

où t est une variable, introduite pour l'homogénéité, que l'on fait ensuite égale à 1, on aura les u des points de rencontre de la courbe avec l'axe Au en résolvant le système d'équations

$$F(u, v) = 0, \quad F'_v = 0,$$

et les v des points de rencontre avec Bv en résolvant le système

$$F(u, v) = 0, \quad F'_u = 0.$$

21. Remarquons maintenant que les tangentes parallèles à une direction donnée sont obtenues par la résolution du système d'équations

$$F(u, v) = 0,$$
$$v - u = k,$$

où k est une constante donnée.

Pour les tangentes parallèles à l'axe des origines, $k = 0$.

Mais une droite parallèle aux axes de coordonnées ne saurait être définie par les coordonnées u et v. Toutes les droites parallèles aux axes, passant, en effet, par le point de rencontre de ces axes (situé à l'infini), ont même u et même v, tous deux infinis. Nous définirons de telles droites par leurs distances à l'un des axes, comptées parallèlement à l'axe des origines, et que nous appellerons leurs abscisses, rapportées à l'axe considéré.

Proposons-nous dès lors de déterminer les tangentes à la courbe

$$F(u, v) = 0$$

(équation algébrique de degré m), parallèles aux axes.

Établissons d'abord un lemme.

L'équation algébrique, de degré m, la plus générale en u et v, peut s'écrire

$$\begin{aligned} 0 = A_0 v^m &+ v^{m-1}(B_1 u + B_0) \\ &+ v^{m-2}(C_2 u^2 + C_1 u + C_0) + \ldots \\ &+ (P_m u^m + P_{m-1} u^{m-1} + \ldots + P_0). \end{aligned}$$

Divisons par v^m,

$$\begin{aligned} 0 = A_0 &+ \frac{1}{v}(B_1 u + B_0) \\ &+ \frac{1}{v^2}(C_2 u^2 + C_1 u + C_0) + \ldots \\ &+ \frac{1}{v^m}(P_m u^m + P_{m-1} u^{m-1} + \ldots + P_0). \end{aligned}$$

Si l'axe Au est tangent à la courbe, ses coordonnées vérifieront cette équation; or les coordonnées de cet axe se composent d'une valeur finie quelconque k pour u et d'une valeur infinie pour v. L'équation précédente devra donc être vérifiée par

$$u = k, \quad \frac{1}{v} = 0,$$

ce qui exige que

$$A_0 = 0,$$

et la réciproque est évidente.

Soit donc maintenant à trouver les tangentes parallèles aux axes, pour la courbe

$$\begin{aligned} 0 = A_0 v^m &+ v^{m-1}(B_1 u + B_0) \\ &+ v^{m-2}(C_2 u^2 + C_1 u + C_0) + \ldots \\ &+ (P_m u^m + P_{m-1} u^{m-1} + \ldots + P_0). \end{aligned}$$

Conservant le même axe Bv, transportons l'axe Au parallèlement à lui-même de la quantité α comptée le long de l'axe des origines, le point A restant sur cet axe.

Pour avoir la nouvelle équation de la courbe, appliquons les formules (6) et (6') du n° 7 en y faisant $\beta = 0$, ce qui donne

$$u = \frac{du_1 - \alpha v_1}{d - \alpha}, \quad v = v_1.$$

L'équation demandée sera donc

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{A}_0 v_1^m &+ v_1^{m-1}\left(\mathrm{B}_1 \frac{du_1 - \alpha v_1}{d - \alpha} + \mathrm{B}_0\right) \\ &+ v_1^{m-2}\left[\mathrm{C}_2\left(\frac{du_1 - \alpha v_1}{d - \alpha}\right)^2 + \mathrm{C}_1 \frac{du_1 - \alpha v_1}{d - \alpha} + \mathrm{C}_0\right] + \ldots \\ &+ \left[\mathrm{P}_m\left(\frac{du_1 - \alpha v_1}{d - \alpha}\right)^m + \ldots + \mathrm{P}_0\right]. \end{aligned}$$

Déterminons α par la condition que le nouvel axe Au soit tangent à la courbe; pour cela, d'après le lemme précédent, annulons le coefficient du terme en v_1^m, ce qui donne

$$0 = \mathrm{A}_0 + \mathrm{B}_1 \frac{\alpha}{\alpha - d} + \mathrm{C}_2\left(\frac{\alpha}{\alpha - d}\right)^2 + \ldots + \mathrm{P}_m\left(\frac{\alpha}{\alpha - d}\right)^m,$$

équation du degré m en α dont les m racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ déterminent autant de tangentes parallèles à Au. Posant

$$\frac{\alpha}{\alpha - d} = z,$$

d'où

$$\alpha = \frac{dz}{z - 1},$$

nous pourrons énoncer ce résultat de la manière suivante :

Appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *les abscisses, rapportées à* *l'axe* Au, *des tangentes parallèles aux axes de coordonnées, pour la courbe de la classe* m,

$$F(u, v) = 0,$$

ces abscisses seront déterminées par

$$\alpha_i = \frac{z_i d}{z_i - 1}$$

(i prenant toutes les valeurs $1, 2, \ldots, m$), $z_1, z_2, \ldots, z_m$ *étant les racines de l'équation que l'on obtient en remplaçant, dans l'ensemble homogène des termes de degré* m *de* $F(u, v)$, u *par* z *et* v *par* 1, *et en égalant ce polynôme à zéro.*

On déduit de là, comme corollaire, que la condition nécessaire et suffisante pour que deux courbes de la classe m aient les mêmes tangentes parallèles aux axes de coordonnées est que les équations de ces courbes contiennent la même partie homogène de termes de degré m. Nous utilisons plus loin cette remarque.

22. Dans le problème précédent, nous nous sommes seulement occupé de rechercher les droites, parallèles aux axes de coordonnées, qui sont tangentes à la courbe; mais on peut aussi se proposer de trouver les équations des points de contact de ces droites et de la courbe.

Il est aisé de déduire ce résultat de celui qui vient d'être obtenu, mais nous allons faire voir qu'on peut l'établir sans calcul, par une remarque bien simple.

Nous avons vu (n° 11) que le point à l'infini dans la direction des axes a pour équation $C = 0$; il est donc corrélatif de la droite de l'infini en coordonnées ordinaires : par conséquent, le problème qui consiste à trouver les points de contact des tangentes à une courbe, issues de ce point, est le même que celui qui consiste, en coordonnées ordinaires, à trouver les tangentes à une courbe, en ses points d'intersection avec la droite de l'infini, c'est-à-dire à trouver ses asymptotes.

Par suite, on voit que :

L'équation de la courbe étant écrite, en groupant les termes de même degré,

$$\varphi_m(u, v) + \varphi_{m-1}(u, v) + \ldots + \varphi_1(u, v) - \varphi_0 = 0,$$

on aura les équations des points de contact de toutes les tangentes parallèles aux axes de coordonnées par la formule

$$u - z_i v + \frac{\varphi_{m-1}(z_i, 1)}{\varphi'_m(z_i, 1)} = 0$$

(i prenant toutes les valeurs 1, 2, ..., m, *où* z_i *est racine de l'équation*

$$\varphi_m(z, 1) = 0.$$

C'est, en effet, ce que l'on obtient par une recherche directe.

23. *Asymptotes.* — On voit immédiatement que les coordonnées des asymptotes, tangentes dont le point de contact est rejeté à l'infini, sont données par la résolution du système des deux équations

$$F(u, v) = 0$$

et

$$F'_u + F'_v = 0.$$

IV. — Application aux courbes du deuxième degré.

24. *Équation générale et équation réduite.* — L'équation générale des courbes du deuxième degré, dans ce système de coordonnées, est

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

On peut mettre cette équation sous une forme simple par un choix convenable d'axes de coordonnées.

Conservant d'abord le même axe des origines, prenons pour nouveaux axes de coordonnées les tangentes à la courbe, parallèles aux axes primitifs.

A cet effet, appliquons les formules de transformation du n° 7 et annulons (n° 21) les coefficients des termes en u^2 et v^2. Cela donne

$$A(d+\beta)^2 + 2B\beta(d+\beta) + C\beta^2 = 0$$

et

$$A\alpha^2 - 2B\alpha(d-\alpha) + C(d-\alpha)^2 = 0,$$

l'abscisse β étant comptée à partir de Bv, et α à partir de Au. Rapportons les deux abscisses à l'axe Au, en posant

$$\beta' = d + \beta;$$

nous avons ainsi, au lieu de la première équation,

$$A\beta'^2 - 2B\beta'(d-\beta') + C(d-\beta')^2 = 0.$$

Donc les abscisses α et β' des tangentes parallèles aux axes, rapportées à l'axe Au, sont les racines de l'équation

$$Az^2 - 2Bz(d-z) + C(d-z)^2 = 0$$

ou

$$(A+2B+C)z^2 - 2d(B+C)z + Cd^2 = 0.$$

Discutons cette équation.

Si $C = 0$, l'une des racines est nulle et l'axe Au est tangent à la courbe, ce que nous savions.

Si $B + C = 0$, les deux racines sont égales et de signes contraires; par suite, le centre de la courbe est situé sur Au. On verrait de même que, si $A + B = 0$, le centre est sur Bv.

Si $A + 2B + C = 0$, l'une des racines tend vers l'infini, c'est-à-dire qu'une des tangentes parallèle aux axes est rejetée l'infini. *La courbe est donc alors une parabole.*

Si $(B+C)^2-(A+2B+C)C = B^2-AC = 0$, les deux racines sont égales; les tangentes parallèles aux axes se confondent; la courbe est alors une hyperbole; les tangentes confondues donnent une asymptote.

Supposons que les deux tangentes soient distinctes et à distance finie. En les prenant pour axes de coordonnées, nous mettrons l'équation de la courbe sous la forme

$$Muv + Nu + Pv + Q = 0.$$

Conservant maintenant les axes de coordonnées, changeons les origines en les transportant aux points de contact des nouveaux axes avec la courbe.

A cet effet, appliquons les formules de transformation du n° 6, et annulons les coefficients des termes en u et v; cela donne

$$Mb + N = 0,$$
$$Ma + P = 0;$$

et l'équation de la courbe devient, après réduction,

$$Muv - \frac{NP}{M} + Q = 0$$

ou

$$uv = \frac{NP - MQ}{M^2}.$$

Telle est donc l'équation réduite des coniques à centre, en coordonnées parallèles.

25. *Nature de la courbe.* — Laissons de côté, pour le moment, cette forme simplifiée de l'équation des coniques, et voyons à quel caractère on peut reconnaître la nature d'une courbe du deuxième degré donnée.

Reprenons l'équation générale

$$A u^2 + 2 B u v + C v^2 + 2 D u + 2 E v + F = 0.$$

Cherchons les tangentes parallèles à une direction donnée pour laquelle

$$u = v - k;$$

les v de ces tangentes seront donnés par

$$\begin{aligned} &A(v-k)^2 + 2Bv(v-k) \\ &\quad + Cv^2 + 2D(v-k) + 2Ev + F = 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &(A + 2B + C)v^2 \\ &\quad + 2[-(A+B)k + D + E]v + Ak^2 - 2Dk + F = 0. \end{aligned}$$

Nous voyons d'abord que, si $A + 2B + C = 0$, une des racines v, quel que soit k, est infinie; l'une des deux tangentes parallèles à la direction donnée est rejetée à l'infini; la courbe est alors, comme d'ailleurs nous l'avons déjà vu, une *parabole*.

Supposons maintenant $A + 2B + C$ différent de 0; la réalité des racines v dépend du signe de

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= [-(A+B)k + D + E]^2 \\ &\quad - (A + 2B + C)(Ak^2 - 2Dk + F) \\ &= (B^2 - AC)k^2 - 2[(A+B)E - (B+C)D]k \\ &\quad + [(D+E)^2 - F(A + 2B + C)]. \end{aligned}$$

Voyons comment le signe de ce trinôme varie avec la valeur attribuée à k; à cet effet, formons la quantité

$$\begin{aligned} \mu &= [(A+B)E - (B+C)D]^2 \\ &\quad - (B^2 - AC)[(D+E)^2 - F(A + 2B + C)]. \end{aligned}$$

Après avoir développé cette valeur de μ et supprimé les termes qui se détruisent, on arrive à la mettre sous la forme

$$\mu = (A + 2B + C)[AE^2 - 2BDE + CD^2 + F(B^2 - AC)];$$

or

$$AF^2 - 2BDE + CD^2 + F(B^2 - AC) = \Delta,$$

discriminant de l'équation de la conique.

Posons

$$A + 2B + C = \Gamma$$

La valeur de μ pourra alors s'écrire

$$\mu = \Gamma\Delta.$$

Supposons Δ différent de o, c'est-à-dire que la conique ne se réduise pas à un système de deux points.

Alors, si $\mu > 0$, le trinôme $\varphi(k)$ a ses racines réelles; par suite, quand on donne à k toutes les valeurs possibles, ce trinôme est tantôt positif, tantôt négatif; il en résulte que l'équation en v a, pour certaines valeurs de k, ses racines réelles, pour d'autres valeurs de k, ses racines imaginaires; la courbe est une *hyperbole*. Les racines de l'équation $\varphi(k) = 0$ donnent alors les directions asymptotiques.

En particulier, si $B^2 - AC = 0$, la valeur de μ, prise sous sa première forme, se réduit à

$$\mu = [(A + B)E - (B + C)D]^2,$$

quantité essentiellement positive; on a, par suite, une hyperbole; d'ailleurs, dans l'équation

$$\varphi(k) = 0,$$

le coefficient du terme en k^2 s'annulant, une des racines devient infinie, c'est-à-dire que la direction des axes de coordonnées est direction asymptotique. Nous avons déjà obtenu ce résultat au n° 24.

Considérons maintenant le cas ou $\mu = 0$, ou, puisque Δ est supposé différent de o, le cas où $\Gamma = 0$. L'équation

$$\varphi(k) = 0$$

a, dans ce cas, ses racines égales; les deux directions asymptotiques sont confondues; la courbe est une *parabole.*

Si $\mu < 0$, le trinôme $\varphi(\lambda)$ a ses racines imaginaires; il conserve donc, pour toute valeur de λ, le signe de son premier terme; par suite, si $B^2 - AC > 0$, le trinôme est constamment positif, l'équation en v a toujours ses racines réelles; on a une *ellipse réelle;* si $B^2 - AC < 0$, le trinôme est constamment négatif, l'équation en v a toujours ses racines imaginaires; on a une *ellipse imaginaire.*

Résumons cette discussion :

Les fonctions des coefficients de l'équation du second degré, caractéristiques de la nature de la conique représentée par cette équation, sont les suivantes :

$$AE^2 - 2BDE + CD^2 + F(B^2 - AC) = \Delta,$$
$$A + 2B + C = \Gamma,$$
$$B^2 - AC = \delta.$$

Si $\Delta = 0$, le premier membre de l'équation se décompose en un produit de facteurs linéaires : on a un système de points.

Si Δ est différent de 0 :

$$\begin{array}{rll} \Gamma\Delta > 0 & \text{hyperbole,} & \\ \Gamma = 0 & \text{parabole,} & \\ \Gamma\Delta < 0 & \text{ellipse} & \left\{ \begin{array}{l} \delta > 0 \text{ réelle,} \\ \delta < 0 \text{ imaginaire.} \end{array} \right. \end{array}$$

26. *Centre.* — Le v de la droite médiane des deux tangentes, parallèles à la direction λ, est donné par la demi-somme des racines de l'équation en v,

$$v = -\frac{(A + B)\lambda + D + E}{A + 2B + C},$$

quant à l'u, il résulte de la formule

$$u = v + k.$$

L'élimination de k entre ces deux équations donne l'équation de la courbe enveloppée par cette droite médiane. On trouve

$$(A + B)u + (B + C)v + D + E = 0;$$

c'est l'équation d'un point. La droite médiane de deux tangentes parallèles est, en effet, un diamètre; l'équation que nous venons d'obtenir est celle du *centre* de la courbe.

Si $(A + B) + (B + C) = A + 2B + C = 0$, ce point est à l'infini; nous retrouvons ainsi la condition déjà obtenue par d'autres considérations, pour que la courbe soit une parabole.

Si $A + B = 0$, le centre se trouve sur l'axe Bv; si $B + C = 0$, il est sur l'axe Au; conditions déjà trouvées d'une autre manière au n° **24**.

Si $D + E = 0$, le centre est sur l'axe des origines.

Remarquons que, en écrivant l'équation de la courbe

$$F(u, v) = 0,$$

l'équation du centre peut s'écrire

$$F'_u + F'_v = 0.$$

27. *Directions conjuguées.* — Cherchons maintenant la direction conjuguée d'une direction donnée, c'est-à-dire la direction de la droite qui joint les points de contact des deux tangentes parallèles à une direction donnée.

La direction d'une droite, ainsi que nous l'avons déjà vu, est caractérisée par la différence des coordonnées de cette droite.

Pour toute droite parallèle à la direction donnée, nous avons

$$v - u = k;$$

pour toute droite parallèle à la direction conjuguée,

$$v - u = k_1.$$

Le problème revient à trouver la relation qui existe entre k et k_1.

Menons par le centre de la conique donnée

$$F(u, v) = A u^2 + 2 B uv + C v^2 + 2 D u + 2 E v + F = 0,$$

une droite dont les coordonnées sont u_1 et v_1. On a (n° 26)

$$F_{u_1} + F'_{v_1} = 0.$$

Cette droite coupe la conique en deux points où les tangentes sont parallèles. Ces tangentes passent par le point dont l'équation est

$$u F'_{u_1} + v F'_{v_1} + F'_{t_1} = 0$$

ou, d'après l'égalité précédente,

$$(u - v) F'_{u_1} + F'_{t_1} = 0,$$

point qui est situé à l'infini.

On a donc, en appelant k le coefficient qui détermine la direction de ces tangentes,

$$k = v - u = \frac{F'_{t_1}}{F'_{u_1}} = \frac{D u_1 + E v_1 + F}{A u_1 + B v_1 + D}.$$

Or u_1 et v_1 sont liés par les relations

$$(A + B) u_1 + (B + C) v_1 + D + E = 0$$

et

$$v_1 - u_1 = k_1,$$

d'où l'on tire

$$u_1 = -\frac{(B + C) k_1 + D + E}{A + 2B + C},$$

$$v_1 = \frac{(A + B) k_1 - (D + E)}{A + 2B + C}.$$

Portant ces valeurs de u_1 et v_1 dans l'expression de k, on a, après réduction,

$$(B^2 - AC)kk_1 - [(A+B)E - (B+C)D](k+k_1) + [(D+E)^2 - F(A+2B+C)] = 0.$$

Telle est la relation qui lie les constantes k et k_1, définissant deux directions conjuguées dans la conique considérée.

28. *Axes.* — Pour déterminer les axes, on adjoindra à l'équation précédente la formule (4) du n° 4

$$d^2 + kk_1 + d(k+k_1)\cos\theta = 0,$$

qui exprime la perpendicularité des directions définies par k et k_1, d étant la distance des origines et θ l'angle des axes de coordonnées avec l'axe des origines.

En éliminant k_1 entre ces deux équations, on a une équation du second degré en k, dont les racines donnent les valeurs de k et k_1, puisque les deux premières équations sont symétriques en k et k_1.

29. *Axe de la parabole.* — Dans le cas de la parabole, l'axe se détermine très aisément. L'équation du centre, situé à l'infini, peut s'écrire, en tenant compte de la condition $A + 2B + C = 0$,

$$(A+B)(u-v) + D + E = 0;$$

d'où l'on tire

$$v - u = k = \frac{D+E}{A+B}.$$

La direction de l'axe est ainsi déterminée.

Si $D + E = 0$, l'axe est parallèle à l'axe des origines.

Si $A + B = 0$, il est parallèle aux axes de coordonnées.

Si l'on a, à la fois, $A + B = 0$ et $D + E = 0$, on voit, en tenant compte de la condition $A + 2B + C = 0$, que l'équation prend la forme

$$A(u - v)^2 + 2D(u - v) + F = 0;$$

elle représente alors un système de deux points situés à l'infini.

30. *Cercle.* — Reprenons la relation qui lie les coefficients k et k_1 de deux directions conjuguées

$$(B^2 - AC)kk_1 + [(B + C)D - (A + B)E](k + k_1) \\ + [(D + E)^2 - F(A + 2B + C)] = 0.$$

Si la conique est un cercle, la direction définie par k_1 est perpendiculaire à la direction définie par k, quel que soit k. L'équation précédente doit donc être identique à la condition de perpendicularité

$$kk_1 + d(k + k_1)\cos\theta + d^2 = 0;$$

par suite, on doit avoir

$$B^2 - AC = \frac{(B + C)D - (A + B)E}{d\cos\theta} \\ = \frac{(D + E)^2 - F(A + 2B + C)}{d^2}.$$

Telles sont les conditions pour que l'on ait un cercle.

Si les axes de coordonnées sont perpendiculaires à l'axe des origines, $\cos\theta = 0$, et ces conditions deviennent

$$(B^2 - AC)d^2 = (D + E)^2 - F(A + 2B + C),$$
$$(B + C)D = (A + B)E.$$

(*A suivre.*)