Solution de la question du concours général

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 323-332

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__323_0>

SOLUTION DE LA QUESTION DU CONCOURS GÉNÉRAL.

Soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

la sphère circonscrite au parallélépipède rectangle circonscrit lui-même à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

soit

$$(1) \qquad lx + my + nz = 1$$

le plan passant par les points de rencontre avec la sphère des trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Le cône, ayant pour base l'intersection de la sphère et du plan (1), a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2)(lx + my + nz)^2 = 0,$$

et il est capable d'un trièdre de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, si l'on a

$$(2) \qquad a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 = 1 \text{ [1]};$$

---

[1] Car, en faisant subir à l'ellipsoïde et au cône la transformation homographique

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{R}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{R}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z'}{R},$$

l'ellipsoïde devient la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2,$$

et le cône devient

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2 - (a^2 + b^2 + c^2)(alx' + bmy' + cnz')^2 = 0.$$

Les diamètres conjugués restant conjugués dans la transformation et étant maintenant ceux d'une sphère, le cône doit être triorthogonal, ce qui exige

$$a^2 + b^2 + c^2 - (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2) = 0,$$

ou

$$1 = a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2.$$

ce qui prouve que le plan (1) se déplace en restant tangent à l'ellipsoïde donné.

Le lieu cherché est donc la podaire de l'ellipsoïde par rapport au point donné.

Soient α, β, γ les coordonnées du point donné; la normale au plan (1) issue de ce point a pour équations

$$(3)\qquad \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} = u.$$

Éliminant l, m, n, u entre (1), (2) et (3), on a l'équation du lieu

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-\alpha x-\beta y-\gamma z)^2 \\ = a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2+c^2(z-\gamma)^2.\end{aligned}$$

Transportant l'origine au point $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$, à l'aide des formules

$$x = x' + \frac{\alpha}{2}, \quad y = y' + \frac{\beta}{2}, \quad z = z' + \frac{\gamma}{2},$$

il vient, en supprimant les accents,

$$\begin{aligned}&\left(x^2+y^2+z^2-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}\right)^2 \\ &\qquad = a^2\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + b^2\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2 + c^2\left(z-\frac{\gamma}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

ou

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2)^2+4Ax^2+4A'y^2+4A''z^2 \\ &\qquad -8Cx+8C'y-8C''z+4D = 0,\end{aligned}\right.$$

avec

$$4A = -a^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2},$$

$$4A' = -b^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2},$$

$$4A'' = -c^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2},$$

$$8C = a^2\alpha, \quad 8C' = b^2\beta, \quad 8C'' = c^2\gamma,$$

$$4D = \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}{16} - \frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}{4}.$$

L'intersection de la surface (4) avec une sphère

$$x^2+y^2+z^2-2(ux+vy+wz+t)=0 \tag{5}$$

est définie par cette équation (5) et par la combinaison suivante des équations (4) et (5) :

$$\left\{\begin{aligned}&(ux+vy+wz+t)^2\\&\quad+Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,\end{aligned}\right. \tag{6}$$

qui représente une quadrique. L'équation générale des quadriques passant par la biquadratique (5) et (6) est

$$\left\{\begin{aligned}&(ux+vy+wz+t)^2\\&\quad+Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+D\\&\qquad+\lambda[x^2+y^2+z^2-2(ux+vy+wz+t)]=0,\end{aligned}\right. \tag{7}$$

et, si cette dernière équation représente un système de deux plans, la biquadratique se compose de deux cercles. Formant les équations du centre

$$\begin{aligned}u(ux+vy+wz+t)+(A+\lambda)x+C-\lambda u&=0,\\v(ux+vy+wz+t)+(A'+\lambda)y+C'-\lambda v&=0,\\w(ux+vy+wz+t)+(A''+\lambda)z+C''-\lambda w&=0,\end{aligned}$$

qui peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{u}{A+\lambda}(ux+vy+wz+t)+x+\frac{C-\lambda u}{A+\lambda}=0,\\&\frac{v}{A'+\lambda}(ux+vy+wz+t)+y+\frac{C'-\lambda v}{A'+\lambda}=0,\\&\frac{w}{A''+\lambda}(ux+vy+wz+t)+z+\frac{C''-\lambda w}{A''+\lambda}=0,\end{aligned}\right. \tag{8}$$

on tirerait x de la première, y de la deuxième, z de la troisième, si l'on connaissait $ux+vy+wz+t$. Prenant cette expression pour inconnue auxiliaire, on multiplie la première équation par u, la deuxième par v, la troisième par w, et l'on ajoute ; ce qui donne

$$\left(\frac{u^2}{A+\lambda}+\frac{v^2}{A'+\lambda}+\frac{w^2}{A''+\lambda}+1\right)(ux+vy+wz+t)-t$$
$$+\frac{Cu}{A+\lambda}+\frac{C'v}{A'+\lambda}+\frac{C''w}{A''+\lambda}-\lambda\left(\frac{u^2}{A+\lambda}+\frac{v^2}{A'+\lambda}+\frac{w^2}{A''+\lambda}\right)=0.$$

Or, si l'on pouvait tirer de cette équation une seule valeur pour $ux+vy+wz+t$, la surface (7) n'aurait qu'un centre : on doit donc pouvoir en tirer une infinité, ce qui exige

$$(9)\qquad \frac{u^2}{A+\lambda}+\frac{v^2}{A'+\lambda}+\frac{w^2}{A''+\lambda}+1=0$$

et, par suite,

$$(10)\qquad t=\lambda+\frac{Cu}{A+\lambda}+\frac{C'v}{A'+\lambda}+\frac{C''w}{A''+\lambda}.$$

Désignant par μ l'indéterminée $ux+vy+wz+t$, on tire des équations (8)

$$x=\frac{(\lambda-\mu)u-C}{A+\lambda},$$
$$y=\frac{(\lambda-\mu)v-C'}{A'+\lambda},$$
$$z=\frac{(\lambda-\mu)w-C''}{A''+\lambda};$$

et il reste à écrire que ces coordonnées vérifient l'équation (7) ou, ce qui revient au même, la quatrième dérivée

$$t(ux+vy+wz+t)+Cx+C'y+C''z$$
$$+D-\lambda(ux+vy+wz+t)-\lambda t=0,$$

ce qui donne

$$(11)\qquad D-\lambda^2-\frac{C^2}{A+\lambda}-\frac{C'^2}{A'+\lambda}-\frac{C''^2}{A''+\lambda}=0.$$

Cette équation du cinquième degré en λ, ne renfermant que λ, le fera donc connaître. Portant la valeur connue de λ dans l'équation (11), on aura une relation entre les coordonnées du centre d'une des sphères, c'est-à-dire le lieu des centres. L'équation (10) fera connaître t et, par suite, le rayon.

Il y a donc cinq séries de sphères.

Remplaçant, dans l'équation (11), D, C, C′, C″, A, A′, A″ par leurs valeurs, elle s'écrit

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}{64} - \frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}{16} - \lambda^2 - \frac{a^4\alpha^2}{64\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)} - \frac{b^4\beta^2}{64\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{b^2}{4}\right)} - \frac{c^4\gamma^2}{64\left(\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{c^2}{4}\right)} = 0,$$

ou, en groupant les termes qui renferment a^2, qui renferment b^2, qui renferment c^2 :

$$\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \lambda\right)\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} + \lambda\right) - \frac{a^2\alpha^2}{16}\,\frac{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{a^2}{4}} - \frac{b^2\beta^2}{16}\,\frac{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{b^2}{4}} - \frac{c^2\gamma^2}{16}\,\frac{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}{\lambda - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8} - \frac{c^2}{4}} = 0.$$

On aperçoit la racine $\lambda = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8}$ et, en l'enlevant, il vient

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} + \lambda + \frac{a^2 \alpha^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)} \\ & \qquad + \frac{b^2 \beta^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{b^2}{4}\right)} \\ & \qquad + \frac{c^2 \gamma^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{c^2}{4}\right)} = 0, \end{aligned} \right.$$

ou

$$\begin{aligned} & \left(\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8}\right) + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} \\ & \qquad + \frac{a^2 \alpha^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)} \\ & \qquad + \frac{b^2 \beta^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{b^2}{4}\right)} \\ & \qquad + \frac{c^2 \gamma^2}{16\left(\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{c^2}{4}\right)} = 0, \end{aligned}$$

ou, en groupant dans les quatre derniers termes ceux qui renferment α^2, qui renferment β^2, qui renferment γ^2 au numérateur,

$$\begin{aligned} & \lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} + \frac{\alpha^2}{4} \frac{\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8}}{\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{a^2}{4}} \\ & \qquad + \frac{\beta^2}{4} \frac{\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8}}{\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{b^2}{4}} \\ & \qquad + \frac{\gamma^2}{4} \frac{\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8}}{\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{c^2}{4}} = 0. \end{aligned}$$

On aperçoit encore la racine $\lambda = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8}$ et, en l'enlevant, il vient

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{\alpha^2}{4\left(\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)} \\ &+ \frac{\beta^2}{4\left(\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{b^2}{4}\right)} \\ &+ \frac{\gamma^2}{4\left(\lambda - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} + \frac{c^2}{4}\right)} = 0. \end{aligned}\right.$$

Donc, deux séries de sphères ne sont pas distinctes.

En remplaçant λ par $\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8}$ dans l'équation (9), on a le lieu des centres

$$(14)\qquad \frac{u^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{v^2}{\frac{b^2}{4}} + \frac{w^2}{\frac{c^2}{4}} - 1 = 0,$$

et, l'équation (10) donnant

$$t = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8} - \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w}{2},$$

l'équation des sphères (5) devient

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} \\ &\qquad + u(\alpha - 2x) + v(\beta - 2y) + w(\gamma - 2z) = 0. \end{aligned}$$

On voit qu'elle est vérifiée, quels que soient u, v, w, par

$$x = \frac{\alpha}{2}, \quad y = \frac{\beta}{2}, \quad z = \frac{\gamma}{2},$$

coordonnées actuelles du point dont on prend la podaire.

Donc, toutes les sphères de la série double passent par un point fixe, le point donné.

Supposant $a > b > c$, et substituant à λ, dans l'équation (13),

$$-\infty,\quad \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\frac{a^2}{4},\quad \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\frac{b^2}{4},\quad \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\frac{c^2}{4},\quad +\infty,$$

on a la succession de signes

$$+\ -|+\ -|+\ -|+\ +;$$

donc l'équation (13) a ses trois racines réelles et séparées.

L'équation (9), où λ est une des trois racines en question, donne le lieu des centres

$$(14)' \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{u^2}{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\frac{a^2}{4}-\lambda} \\ &+\frac{v^2}{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\frac{b^2}{4}-\lambda} \\ &+\frac{w^2}{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}+\frac{c^2}{4}-\lambda}-1=0. \end{aligned} \right.$$

Ce lieu est : pour la plus petite racine, un ellipsoïde ; pour la moyenne, un hyperboloïde à une nappe ; pour la plus grande, un hyperboloïde à deux nappes. Ces trois surfaces et l'ellipsoïde (14) sont homofocaux, puisque les différences des dénominateurs de u^2, v^2 et w^2 sont les mêmes en passant de l'une à l'autre.

Remplaçant t par sa valeur (10) dans l'équation des sphères (5), cette équation devient

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &x^2+y^2+z^2-2\lambda-2u\left(x+\frac{C}{A+\lambda}\right) \\ &\quad 2v-\left(y+\frac{C'}{A'+\lambda}\right)-2w\left(z+\frac{C''}{A''+\lambda}\right)=0. \end{aligned} \right.$$

Dire que les sphères (15), correspondant à une valeur de λ, racine de l'équation (13), sont orthogonales à une sphère fixe, c'est dire qu'il y a un point de l'espace qui a même puissance par rapport à la sphère (15), quels que soient u, v, w, pourvu qu'ils vérifient l'équation (14). On est donc conduit à égaler à zéro les coefficients de u, v, w, ce qui fournit le point

$$x = -\frac{C}{A+\lambda}, \quad y = -\frac{C'}{A'+\lambda}, \quad z = -\frac{C''}{A''+\lambda},$$

dont la puissance par rapport à la sphère (15) est indépendante de u, v, w et égale à

$$\frac{C^2}{(A+\lambda)^2} + \frac{C'^2}{(A'+\lambda)^2} + \frac{C''^2}{(A''+\lambda)^2} - 2\lambda.$$

Ce point est le centre de la sphère cherchée, et la quantité ci-dessus est le carré de son rayon.

L'équation (13) ayant trois racines, *chaque série de sphères est donc orthogonale à une sphère fixe* S_1, S_2 *ou* S_3.

Ces trois sphères sont orthogonales deux à deux, car il suffit, pour cela, que le carré de la distance de leurs centres soit égal à la somme des carrés de leurs rayons, c'est-à-dire que l'on ait, après simplifications, λ et λ' étant deux racines distinctes de l'équation (13),

$$\frac{C^2}{(A+\lambda)(A+\lambda')} + \frac{C'^2}{(A'+\lambda)(A'+\lambda')} + \frac{C''^2}{(A''+\lambda)(A''+\lambda')} = \lambda + \lambda'.$$

Or c'est le résultat qu'on obtient en retranchant du premier membre de l'équation (11), dont λ et λ' sont également racines, ce premier membre où l'on a remplacé λ par λ', et en divisant la différence par $\lambda - \lambda'$, qui est différent de zéro, puisque λ et λ' sont des racines distinctes.

Ces trois sphères passent par le point fixe donné, car leur équation

$$x^2+y^2+z^2+2\frac{Cx}{A+\lambda}+2\frac{C'y}{A'+\lambda}+2\frac{C''z}{A''+\lambda}+2\lambda=0$$

devient l'équation (12), quand on y remplace x, y et z par $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ et $\frac{\gamma}{2}$, et l'équation (12) admet les trois racines de l'équation (13).

De là résulte que le trièdre des trois droites qui joignent le point donné, commun aux trois sphères, aux centres de ces trois sphères est un trièdre trirectangle ([1]).

Ch. B.