

E. CATALAN

Sur la circonférence des neuf points

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 82-84

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__82_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

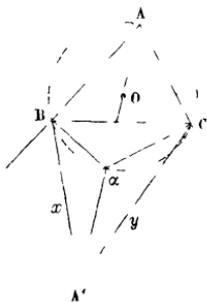
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CIRCONFERENCE DES NEUF POINTS;

PAR M. E. CATALAN.

— — —

1. *Triangles annexes.* — Par le sommet B d'un triangle ABC, menons la droite Bx, symétrique de BC, relativement à AB; et, par le sommet C, menons Cy, symétrique de BC, relativement à AC. En général, ces



droites Bx, Cy déterminent, avec BC, un triangle BCA' (1). Pour abréger, je dirai que ce triangle est l'*annexe* de ABC, suivant BC.

D'après la construction, les angles CBA', BCA' sont

(1) Si l'angle A est droit, les lignes Bx, Cy sont parallèles

donnés par les formules

$$B' = 2^d - 2B, \quad C' = 2^d - 2C;$$

d'où il résulte, semblablement,

$$A' = 2^d - 2A.$$

Ainsi, *les angles du triangle annexe de ABC sont les suppléments des doubles des angles du triangle ABC.*

2. REMARQUE. — *Les trois annexes d'un triangle donné sont semblables entre elles.*

3. THÉORÈME I. — *La circonférence circonscrite à un triangle ABC contient les centres des cercles inscrits aux trois annexes de ABC. De plus, ces centres sont les points diamétralement opposés aux sommets A, B, C.*

Soit α le centre du cercle inscrit au triangle BCA' . La droite $B\alpha$, bissectrice de l'angle CBA' , est, par la construction même, perpendiculaire à BA' . Semblablement, $C\alpha$ est perpendiculaire à CA . Donc la circonférence, décrite sur $A\alpha$ comme diamètre, est circonscrite au triangle donné.

4. THÉORÈME II. — *Les sommets A, A' et les centres O, α appartiennent à une même droite, bissectrice de l'angle A'.*

Soit $A'\alpha$ cette bissectrice. On a

$$B\alpha A' = 2^d - \frac{1}{2}(A' + B') = A + B.$$

D'un autre côté, les angles $B\alpha C$, BCA sont égaux, comme inscrits au même segment :

$$B\alpha C = C;$$

donc

$$B\alpha A' + B\alpha C = A + B + C = 2^d.$$

5. REMARQUES. — 1° A est le centre du cercle ex-inscrit au triangle $A'BC$, tangent au côté BC ; 2° le rayon de ce cercle est la hauteur du triangle ABC , opposée au côté BC .

6. Relations entre les éléments des quatre triangles. — Ces relations donnent lieu à d'intéressants exercices trigonométriques. En général, elles sont assez compliquées, sauf celle-ci :

Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle donné; soient λ , μ , ν les distances AA' , BB' , CC' . On a

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{R}.$$

7. Circonférence des neuf points. — Supposons que A , B , C soient les milieux des côtés d'un triangle MNP . La circonférence ABC devient la *circonférence des neuf points* (milieux des côtés; pieds des hauteurs; milieux des segments compris entre les sommets et le point de concours des hauteurs); elle contient donc les centres des cercles inscrits aux annexes de ABC . Autrement dit :

THÉORÈME. — *La circonférence des neuf points, relative à un triangle MNP , contient les centres des cercles inscrits aux annexes du triangle dont les sommets sont les milieux des côtés de MNP .*

Voilà donc trois points, ajoutés aux *neuf* que l'on connaissait (1).

(1) Nous faisons abstraction des autres points remarquables, en nombre indéfini, situés sur la *circonférence des neuf points*. Voir *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6^e édit., p. 181.