

S. RÉALIS

**Résolution d'une équation indéterminée
par formules directes**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 535-542

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__535_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**RESOLUTION D'UNE EQUATION INDETERMINÉE PAR FORMULES
DIRECTES;**

PAR M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

1. Proposons-nous de résoudre, en nombres entiers, l'équation indéterminée

$$(n + 4)x^2 - ny^2 = 4,$$

dans laquelle n est un entier > 0 , ou < -4 .

Cette équation est de celles où il suffit de connaître une seule solution, pour en déduire aussitôt une autre,

(¹) Par exemple, en appliquant ce theoreme :

Si a, b sont premiers entre eux, la fraction

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (a+b-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots a \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots b}$$

se reduit a un nombre entier (*Melanges mathematiques*, p 129).

et par suite, de proche en proche, une infinité d'autres. Les formules à employer à cet effet sont même, dans notre cas, beaucoup plus simples que celles qui se rapportent à l'équation de Pell, et aux équations quadratiques analogues, traitées dans les Ouvrages classiques.

Soit, en effet,

$$(n + 4)\alpha^2 - n\beta^2 = 4$$

la solution connue. On reconnaîtra immédiatement, par la substitution directe, que l'on arrive à une seconde solution par l'emploi des formules

$$x = \frac{1}{2}[(n + 2)\alpha - n\beta],$$
$$y = \frac{1}{2}[(n + 4)\alpha + (n + 2)\beta],$$

où l'on prendra α et β positifs, pour être assuré d'avoir

$$x > \alpha, \quad y > \beta.$$

D'après cela, la solution initiale

$$(n + 4).1^2 - n.1^2 = 4,$$

insignifiante en apparence, suffit pour amener le résultat

$$(n + 4)(n + 1)^2 - n(n + 3)^2 = 4,$$

suivi d'une infinité d'autres identités résolvant l'équation.

Ayant ainsi calculé les premières solutions, écrivons, par ordre, les valeurs successives des indéterminées, comme il suit :

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 1 + n,$$
$$x_3 = 1 + 3n + n^2,$$
$$x_4 = 1 + 6n + 5n^2 + n^3,$$
$$x_5 = 1 + 10n + 15n^2 + 7n^3 - n^4,$$
$$x_6 = 1 + 15n + 35n^2 + 28n^3 + 9n^4 + n^5,$$

.....:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1, \\
y_2 &= 3 + n, \\
y_3 &= 5 + 5n + n^2, \\
y_4 &= 7 + 14n + 7n^2 + n^3, \\
y_5 &= 9 + 30n + 27n^2 + 9n^3 + n^4, \\
y_6 &= 11 + 55n + 77n^2 + 44n^3 + 11n^4 + n^5, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

La loi que suivent les valeurs de x est facile à apercevoir. On voit effectivement que, le terme indépendant de x étant partout égal à l'unité, les coefficients de n , à partir de x_2 , représentent la suite des nombres triangulaires; les coefficients de n^2 , à partir de x_3 , sont donnés par la suite des nombres figurés du quatrième ordre, les coefficients de n^3 , à partir de x_4 , sont donnés par la suite des nombres figurés du sixième ordre, D'après cela, la valeur générale de x se trouvera exprimée par

$$\begin{aligned}
x_a = 1 - \frac{(a-1)a}{2} n + \frac{(a-2)(a-1)a(a+1)}{2.3.4} n^2 \\
+ \frac{(a-3)(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)}{2.3.4.5.6} n^3 + \dots + n^{a-1},
\end{aligned}$$

le coefficient de n^{a-k} étant

$$\frac{k(k+1)(k+2)\dots(2n-k-1)}{2.3.4\dots(2n-2k)};$$

c'est ce qu'il est facile de vérifier après avoir assigné l'expression de y_a .

Pour obtenir y_a , nous ferons $n = -(n' + 4)$, par où la proposée se change en

$$(n' + 4)y^2 - n'x^2 = 4,$$

équation de même forme, à l'échange près des lettres x, y entre elles. Les valeurs de y seront donc, étant ad-

mis le développement ci-dessus de x_a ,

$$y_1 = 1,$$

$$y_2 = 1 + \frac{1 \cdot 2}{2} n',$$

$$y_3 = 1 + \frac{2 \cdot 3}{2} n' + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} n'^2,$$

$$y_4 = 1 + \frac{3 \cdot 4}{2} n' + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} n'^2 + n'^3,$$

$$y_5 = 1 + \frac{4 \cdot 5}{2} n' + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} n'^2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} n'^3 + n'^4,$$

.....

$$y_a = 1 + \frac{(a-1)a}{2} n' + \frac{(a-2)(a-1)a(a+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4} n'^2$$

$$+ \frac{(a-3)(a-2) \dots (a+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} n'^3 + \dots + n'^{a-1},$$

où l'on fera partout $n' = -(4 + n)$. On retrouve par là les valeurs de y écrites plus haut, à cela près que les expressions y_a d'indice pair se présentent ici sous forme négative, ce qui n'altère pas le résultat de la substitution dans la proposée.

Les expressions générales de x_a et y_a , qui viennent d'être écrites, satisfont aux relations fondamentales

$$x_a = \frac{1}{2} [(n-2)x_{a-1} + ny_{a-1}],$$

$$y_a = \frac{1}{2} [(n+4)x_{a-1} + (n+2)y_{a-1}],$$

d'où résulte que, si les valeurs positives x_{a-1} , y_{a-1} vérifient la proposée, les valeurs $x_a > x_{a-1}$, $y_a > y_{a-1}$ la vérifient aussi. La loi que suivent les valeurs successives de x et y , énoncée ci-dessus par induction, se trouve donc démontrée.

On peut aussi observer que l'on a

$$y_a - y_{a-1} = x_{a-1} + x_a,$$

d'où l'on déduit

$$y_a = 2(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{a-1}) + x_a;$$

cette formule, d'après la sommation connue des séries relatives aux nombres figurés, s'accorde avec l'expression générale de y_a ci-dessus.

2. Nous signalerons encore, comme conséquence très remarquable des relations fondamentales inscrites, la loi de récurrence

$$\begin{aligned}x_a &= (n + 2)x_{a-1} - x_{a-2}, \\y_a &= (n + 2)y_{a-1} - y_{a-2},\end{aligned}$$

qui subsiste entre trois valeurs consécutives de chacune des indéterminées x, y , à partir de $a = 3$. Il s'en déduit une nouvelle preuve de l'exactitude des développements ci-dessus de x_a et y_a .

Il s'en déduit, en outre, ce qui n'est pas moins important, une nouvelle forme de développement pour ces mêmes quantités.

Faisons, à cet effet, $n = m - 2$, par où l'équation proposée prend la forme

$$(m + 2)x^2 - (m - 2)y^2 = 4, \quad .$$

m étant un entier > 2 ou < -2 . Les indéterminées étant soumises à la loi indiquée, il y a lieu de leur appliquer la théorie bien connue des séries récurrentes; de la sorte, les valeurs successives de x et y seront représentées, respectivement, par les coefficients des puissances croissantes de la variable z , dans les développements des deux fractions rationnelles comprises dans l'expression $\frac{1 \mp z}{1 - mz + z^2}$.

On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{1 - z}{1 - mz + z^2} &= x_1 + x_2 z + x_3 z^2 + \dots + x_a z^{a-1} + \dots, \\ \frac{1 - z}{1 - mz + z^2} &= y_1 + y_2 z + y_3 z^2 + \dots + y_a z^{a-1} + \dots,\end{aligned}$$

les termes x_1 et y_1 étant égaux à l'unité. Il suffira évidemment de considérer l'un de ces développements, vu que l'autre s'y ramène par le changement simultané des signes de m et de z , et que par suite les valeurs absolues des coefficients x_a et y_a se déduisent l'une de l'autre, en changeant m en $-m$ (ce qui se voit d'ailleurs sur l'équation même).

On trouve ainsi, en se bornant aux valeurs de x ,

$$\begin{aligned} x_2 &= -1 + m, \\ x_3 &= -1 - m + m^2, \\ x_4 &= 1 - 2m - m^2 - m^3, \\ x_5 &= 1 + 2m - 3m^2 - m^3 + m^4, \\ x_6 &= -1 + 3m + 3m^2 - 4m^3 - m^4 + m^5, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

valeurs qui s'accordent avec les expressions obtenues précédemment.

D'après la théorie rappelée, pour exprimer le coefficient général x_a , on décomposera d'abord la fraction génératrice en deux fractions simples, après quoi le terme général du développement de la même fraction s'obtiendra en ajoutant ensemble les termes généraux des fractions partielles développées. Nous parviendrons, en procédant ainsi, d'abord à la formule de décomposition

$$\frac{1-z}{1-mz+z^2} = \frac{1}{m+2} \left(\frac{A+1}{A-z} + \frac{B+1}{B-z} \right),$$

puis à l'expression cherchée du coefficient de z^{a-1} , savoir

$$x_a = \frac{(A+1)A^{a-1} + (B+1)B^{a-1}}{m+2},$$

A et B étant les deux racines de l'équation

$$z^2 - mz + 1 = 0.$$

Il est bon d'ajouter que l'on a, dans ce qui précède, la résolution complète de l'équation considérée; en sorte que, entre deux solutions consécutives, données par nos formules, il ne saurait y avoir aucun système de valeurs intermédiaires de x et y satisfaisantes. Bornons-nous à dire, ici, que ce fait important peut s'établir par des considérations analogues à celles dont s'est servi Lagrange à l'égard de l'équation de Pell, dans le paragraphe VII, n° 73, des *Additions à l'analyse indéterminée d'Euler*.

3. *Remarque.* — Faisant, dans l'équation proposée, $x = 2u + 1$, $y = 2v + 1$, on a la transformée

$$(n + 4)(u^2 + u) = n(v^2 + v),$$

dont la résolution, implicite dans ce qui précède, sert à déterminer une infinité de couples de nombres triangulaires ayant entre eux le rapport de n à $n + 4$. Ce rapport, comme on voit, se réduit à celui de p à $p + 1$, si $n = 4p$, et à celui de p à $p + 2$, si $n = 2p$.

Qu'il s'agisse, par exemple, de trouver tous les nombres triangulaires qui sont triples d'autres nombres de même espèce. Nous ferons $n = 2$, et la question sera résolue par l'équation

$$3(u^2 + u) = v^2 + v,$$

dont les solutions correspondent à celles de l'équation

$$3x^2 - y^2 = 2,$$

pour $u = \frac{x-1}{2}$, $v = \frac{y-1}{2}$. Les valeurs de x et y étant, à partir de x_2 et y_2 ,

$$\begin{array}{l} x = 3, \quad 11, \quad 41, \quad 153, \quad 571, \quad \dots, \\ y = 5, \quad 19, \quad 71, \quad 265, \quad 989, \quad \dots, \end{array}$$

(542)

celles de u et v seront

$$u = 1, 5, 20, 76, 285, \dots$$

$$v = 2, 9, 35, 132, 494, \dots$$

Les valeurs de $\frac{u^2 + u}{2}$ et $\frac{v^2 - v}{2}$ engendreront ensuite les deux séries

$$1, 15, 210, 2926, 40755, \dots,$$

$$3, 45, 630, 8778, 122265, \dots,$$

dont tous les termes sont des nombres triangulaires, chaque terme de la seconde étant triple de celui qui lui correspond dans la première.