NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HUMBERT

Sur les triangles conjugués à une conique et sur les tétraèdres conjugués à une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 167-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__167_0>

SUR LES TRIANGLES CONJUGUÉS A UNE CONIQUE ET SUR LES TÉTRAÈDRES CONJUGUÉS A UNE QUADRIQUE;

PAR M. HUMBERT,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Bar-le-Duc.

Je me propose d'exposer dans cette Note, relativement aux triangles polaires des coniques, aux diamètres conjugués dans les surfaces du second degré et aux tétraèdres polaires de ces surfaces, une méthode de calcul que je crois nouvelle.

Triangles polaires des coniques.

1. Nous supposerons l'équation de la conique donnée en coordonnées homogènes; soit

$$(1)\qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

cette équation.

Le premier membre peut se mettre identiquement sous la forme

$$P^2 + P'^2 + P''^2,$$

où P, P', P'' désignent des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z,

$$\begin{aligned} P &\equiv ax + by + cz, \\ P' &\equiv a'x + b'y + c'z, \\ P'' &\equiv a''x + b''y + c''z. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant les neuf cosinus directeurs de trois droites rectangulaires $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, et choisissons le système pour lequel leur déterminant $(\alpha\beta'\gamma'')$ est égal à $+1$.

Nous avons l'identité

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &P^2 + P'^2 + P''^2 = (\alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'')^2 \\ &\quad + (\beta P + \beta' P' + \beta'' P'')^2 + (\gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P'')^2 \end{aligned}\right.$$

ou

$$P^2 + P'^2 + P''^2 = Q^2 + Q'^2 + Q''^2,$$

en posant

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} Q &= \alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'', \\ Q' &= \beta P + \beta' P' + \beta'' P'', \\ Q'' &= \gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P''. \end{aligned}\right.$$

Les trois droites $Q = 0$, $Q' = 0$, $Q'' = 0$ sont les trois côtés d'un triangle polaire de la conique (1), et, si l'on y regarde α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' comme neuf quantités variables liées par les six relations connues, on voit que ce sont les équations générales des trois côtés d'un triangle polaire de la conique (1). Les expressions générales des coordonnées des trois sommets d'un triangle polaire s'obtiendront en résolvant les trois systèmes d'équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} Q' &= 0, \\ Q'' &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} Q'' &= 0, \\ Q &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} Q &= 0, \\ Q' &= 0, \end{aligned}\right.$$

par rapport à x, y, z.

Résolvons le premier système, nous aurons

$$\begin{aligned} \beta P + \beta' P' + \beta'' P'' &= 0, \\ \gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P'' &= 0; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{P}{(\beta'\gamma'')} = \frac{P'}{(\gamma\beta'')} = \frac{P''}{(\beta\gamma')} = \theta.$$

Or on a

$$(\beta'\gamma'') = \alpha, \quad (\beta''\gamma) = \alpha', \quad (\beta\gamma') = \alpha'',$$

et l'on peut multiplier toutes les coordonnées homogènes d'un point par un nombre quelconque. Donc un système de valeurs des coordonnées homogènes du premier sommet sera donné par les trois équations

$$P = \alpha, \quad P' = \alpha', \quad P'' = \alpha'',$$

ou

$$\begin{aligned} a x_1 + b y_1 + c z_1 &= \alpha, \\ a' x_1 + b' y_1 + c' z_1 &= \alpha', \\ a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1 &= \alpha''. \end{aligned}$$

On en tire

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= (b'c'')\alpha + (b''c)\alpha' + (bc')\alpha'', \\ y_1 &= (c'a'')\alpha + (c''a)\alpha' + (ca')\alpha'', \\ z_1 &= (a'b'')\alpha + (a''b)\alpha' + (ab')\alpha'', \end{aligned} \right.$$

de même, en résolvant les deux autres systèmes d'équations (4),

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= (b'c'')\beta + (b''c)\beta' + (bc')\beta'', \\ y_2 &= (c'a'')\beta + (c''a)\beta' + (ca')\beta'', \\ z_2 &= (a'b'')\beta + (a''b)\beta' + (ab')\beta''; \end{aligned} \right.$$

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} x_3 &= (b'c'')\gamma + (b''c)\gamma' + (bc')\gamma'', \\ y_3 &= (c'a'')\gamma + (c''a)\gamma' + (ca')\gamma'', \\ z_3 &= (a'b'')\gamma + (a''b)\gamma' + (ab')\gamma''. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les expressions générales des coordonnées des trois sommets d'un triangle polaire quelconque d'une conique.

2. Rappelons que les coefficients $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ sont liés aux coefficients A, A′, A″, B, B′, B″, par les relations suivantes :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= a^2 + a'^2 + a''^2, \\ A' &= b^2 + b'^2 + b''^2, \\ A'' &= c^2 + c'^2 + c''^2, \\ B &= bc + b'c' + b''c'', \\ B' &= ca + c'a' + c''a'', \\ B'' &= ab + a'b' + a''b''. \end{aligned} \right.$$

En tenant compte de ces relations, on a, entre x_1, y_1, z_1,

$x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$, les relations suivantes :

$$
(9)\quad
\left\{
\begin{array}{l}
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = A'A'' - B^2 = \mathcal{A},\\
y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = A''A - B'^2 = \mathcal{A}',\\
z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = AA' - B''^2 = \mathcal{A}'',\\
y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = B'B'' - AB = \mathcal{B},\\
z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3 = B''B - A'B' = \mathcal{B}',\\
x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = BB' - A''B'' = \mathcal{B}'';
\end{array}
\right.
$$

les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ sont les coefficients de la forme adjointe ou de l'équation tangentielle.

Remarque I. — Dans le cas général où le discriminant n'est pas nul, les trois points 1, 2, 3 ne sont jamais en ligne droite, car le déterminant des lettres $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ est égal au déterminant des neuf cosinus, multiplié par le suivant

$$
\begin{vmatrix}
(b'c'') & (b''c) & (bc')\\
(c'a'') & (c''a) & (ca')\\
(a'b'') & (a''b) & (ab')
\end{vmatrix},
$$

qui est égal au carré du déterminant des fonctions linéaires P, P′, P″, c'est-à-dire au discriminant. Nous ne nous servirons de nos formules que dans ce cas.

Remarque II. — Au lieu de l'équation ponctuelle, on eût pu se donner l'équation tangentielle de la conique sous la forme

$$
(10)\quad Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'wu + 2B''uv = 0;
$$

on eût obtenu de la même façon les coordonnées homogènes des trois côtés d'un triangle polaire quelconque. Il n'y a qu'à mettre, dans (5), (6), (7), u, v, w à la place de x, y, z, pour les obtenir. De même, en mettant u, v, w à la place de x, y, z dans les relations (9), on aura les six relations qui existent entre les neuf coordonnées homogènes des trois côtés d'un triangle polaire quelconque; $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ seront ici les coefficients de la forme adjointe à la forme (10), c'est-à-dire de l'équation ponctuelle de la conique (10).

3. On obtient aisément de nouvelles relations en résolvant (5) par rapport à α, α', α'', de même (6) par rapport à β, β', β'', (7) par rapport à γ, γ', γ'' :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta\alpha &= a x_1 + b y_1 + c z_1 = \mathrm{P}_1,\\
\Delta\alpha' &= a' x_1 + b' y_1 + c' z_1 = \mathrm{P}'_1,\\
\Delta\alpha'' &= a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1 = \mathrm{P}''_1,\\
\Delta\beta &= a x_2 + b y_2 + c z_2 = \mathrm{P}_2,\\
\Delta\beta' &= a' x_2 + b' y_2 + c' z_2 = \mathrm{P}'_2,\\
\Delta\beta'' &= a'' x_2 + b'' y_2 + c'' z_2 = \mathrm{P}''_2,\\
\Delta\gamma &= a x_3 + b y_3 + c z_3 = \mathrm{P}_3,\\
\Delta\gamma' &= a' x_3 + b' y_3 + c' z_3 = \mathrm{P}'_3,\\
\Delta\gamma'' &= a'' x_3 + b'' y_3 + c'' z_3 = \mathrm{P}''_3.
\end{aligned}\right.$$

De ces relations, on déduit encore

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{P}_1^2 + \mathrm{P}_1'^2 + \mathrm{P}_1''^2 &= \Delta^2,\\
\mathrm{P}_2^2 + \mathrm{P}_2'^2 + \mathrm{P}_2''^2 &= \Delta^2,\\
\mathrm{P}_3^2 + \mathrm{P}_3'^2 + \mathrm{P}_3''^2 &= \Delta^2,\\
\mathrm{P}_1^2 + \mathrm{P}_2^2 + \mathrm{P}_3^2 &= \Delta^2,\\
\mathrm{P}_1'^2 + \mathrm{P}_2'^2 + \mathrm{P}_3'^2 &= \Delta^2,\\
\mathrm{P}_1''^2 + \mathrm{P}_2''^2 + \mathrm{P}_3''^2 &= \Delta^2;
\end{aligned}\right.$$

Δ désigne le déterminant des fonctions linéaires P, P', P'', dont le carré Δ^2 est le discriminant de la conique.

4. Cherchons maintenant si une conique

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(x, y, z) = a x^2 &+ a' y^2 + a'' z^2\\
&+ 2 b y z + 2 b' z x + 2 b'' x y = 0
\end{aligned}\right.$$

est ou non circonscrite à un triangle polaire de la conique (1). Il faudra pour cela que les trois équations

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, y_1, z_1) &= a x_1^2 + a' y_1^2 + \ldots + 2b'' x_1 y_1 = 0,\\
\varphi(x_2, y_2, z_2) &= a x_2^2 + a' y_2^2 + \ldots + 2b'' x_2 y_2 = 0,\\
\varphi(x_3, y_3, z_3) &= a x_3^2 + a' y_3^2 + \ldots + 2b'' x_3 y_3 = 0
\end{aligned}$$

soient simultanément satisfaites; leur somme devra être nulle, et l'on aura

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_1, y_1, z_1) + \varphi(x_2, y_2, z_2) + \varphi(x_3, y_3, z_3)\\
&\qquad = a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + \ldots + 2b''\mathcal{B}'' = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour que la conique (13) soit circonscrite à un triangle polaire de (1), il est nécessaire que la relation

$$a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + a''\mathcal{A}'' + \ldots + 2b''\mathcal{B}'' = 0$$

existe entre les coefficients de l'équation ponctuelle de la première et de l'équation tangentielle de la seconde.

Je dis que, réciproquement, si cette relation est exacte, la conique (13) est circonscrite à une infinité de triangles polaires de (1); car, prenons un point quelconque de (13), nous pouvons déterminer $\alpha, \alpha', \alpha''$ de façon que x_1, y_1, z_1 soient les coordonnées de ce point; la polaire de ce point par rapport à la conique (1) coupe (13) en deux points; nous déterminerons β, β', β'' de façon que x_2, y_2, z_2 coïncide avec l'un de ces points; alors les neuf cosinus directeurs seront parfaitement déterminés et l'on aura

$$\varphi(x_1, x_1, z_1) = 0, \quad \varphi(x_2, y_2, z_2) = 0, \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0;$$

donc $\varphi_3 = 0$, et le troisième point est aussi sur la conique $\varphi = 0$: c'est le second point où la polaire du premier, relative à (1), rencontre la conique (13). Donc

$$a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + \ldots + 2b''\mathcal{B}'' = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que la conique (13) soit circonscrite à une infinité de triangles polaires de (1); il y a un pareil triangle pour chaque point de la conique (13).

Remarque. — Le point (x_2, y_2, z_2) étant déjà sur la polaire du point (x_1, y_1, z_1), quels que soient β, β', β'', il n'y aura qu'une relation à établir entre β, β', β'' pour que le point (x_2, y_2, z_2) soit aussi sur la conique $\varphi = 0$.

5. Enfin, si l'on se place au point de vue des coordonnées tangentielles,

$$a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + \ldots + 2b''\mathcal{B}'' = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que la conique (1) soit inscrite dans une infinité de triangles polaires de (13). On obtiendrait ce résultat en se servant des formules analogues relatives aux coordonnées tangentielles.

Système de diamètres conjugués dans les surfaces du second degré.

6. Nous regarderons (1) comme étant l'équation du cône des directions asymptotiques d'une surface du second degré à centre unique, et x, y, z comme étant proportionnels aux cosinus directeurs d'une droite passant à l'origine (c'est ce que nous nommerons des *coefficients directeurs*). Alors $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ seront les expressions générales des coefficients directeurs de trois directions conjuguées de la surface.

L'équation de la surface rapportée à son centre pourra se ramener à la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + \ldots + 2B''xy = 1 \quad \text{ou} \quad P^2 + P'^2 + P''^2 = 1,$$

en prenant pour origine le centre de la surface.

La relation

$$a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + \ldots + 2b''\mathcal{B}'' = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que le cône (13) soit circonscrit à une infinité de trièdres polaires du cône (1), et aussi pour que le cône (1) soit inscrit dans une infinité de trièdres polaires de (13).

Applications. — Nous allons donner diverses applications de nos formules. Calculons d'abord les coordonnées $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3$ des extrémités de trois diamètres conjugués quelconques. On a

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{Y_1}{y_1} = \frac{Z_1}{z_1} = \lambda\,;$$

en exprimant que l'équation de la surface est satisfaite pour $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, on a

$$\lambda^2(P_1^2 + P_1'^2 + P_1''^2) = 1,$$

ou, d'après (12),

$$\lambda^2\Delta^2 = 1, \quad \lambda = \frac{1}{\Delta}.$$

On a donc

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{x_1}{\Delta}, & Y_1 &= \frac{y_1}{\Delta}, & Z_1 &= \frac{z_1}{\Delta}, \\ X_2 &= \frac{x_2}{\Delta}, & Y_2 &= \frac{y_2}{\Delta}, & Z_2 &= \frac{z_2}{\Delta}, \\ X_3 &= \frac{x_3}{\Delta}, & Y_3 &= \frac{y_3}{\Delta}, & Z_3 &= \frac{z_3}{\Delta}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, appelons d_1, d_2, d_3 les longueurs des trois demi-diamètres conjugués, nous aurons

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} d_1^2 &= \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{\Delta^2}, \\ d_2^2 &= \frac{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}{\Delta^2}, \\ d_3^2 &= \frac{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}{\Delta^2}. \end{aligned} \right.$$

1° *La somme des carrés des longueurs de trois diamètres conjugués est constante.*

Car, en ajoutant les trois égalités (15), on a

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{A}''}{\Delta^2}. \tag{16}$$

2° *La somme des projections de trois diamètres conjugués sur un axe quelconque est constante.*

Car on peut regarder l'axe des x comme une droite quelconque passant par le centre, et, d'après (14), on a

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{\Delta^2} = \frac{\mathcal{A}}{\Delta^2}.$$

3° *Le volume du tétraèdre ayant pour arêtes trois demi-diamètres conjugués est constant.*

En effet on a

$$6V = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

et nous avons vu que le déterminant $(x_1 y_2 z_3)$ est égal à Δ^2; donc

$$6V = \frac{1}{\Delta}. \tag{18}$$

7. En cherchant les coordonnées du pôle du plan des extrémités de trois diamètres conjugués, on arrive à une quatrième propriété.

En effet, le plan des trois extrémités a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & \Delta \\ x_2 & y_2 & z_2 & \Delta \\ x_3 & y_3 & z_3 & \Delta \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Le pôle est à l'intersection des trois plans tangents

$$\begin{aligned} P_1 P + P'_1 P' + P''_1 P'' &= \Delta, \\ P_2 P + P_2 P' + P''_2 P'' &= \Delta, \\ P_3 P + P'_3 P' + P''_3 P'' &= \Delta. \end{aligned}$$

Remplaçons dans ces équations P_1, P_2, ... par leurs valeurs tirées des égalités (11), nous aurons

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'' &= 1, \\ \beta P + \beta' P' + \beta'' P'' &= 1, \\ \gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P'' &= 1; \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\begin{aligned} P &= \alpha + \beta + \gamma, \\ P' &= \alpha' + \beta' + \gamma', \\ P'' &= \alpha'' + \beta'' + \gamma''. \end{aligned}$$

Il n'y a donc plus qu'à résoudre les équations

$$\begin{aligned} aX + bY + cZ &= \alpha + \beta + \gamma, \\ a'X + b'Y + c'Z &= \alpha' + \beta' + \gamma', \\ a''X + b''Y + c''Z &= \alpha'' + \beta'' + \gamma'', \end{aligned}$$

pour avoir les coordonnées X, Y, Z du pôle du plan (19). On a ainsi

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\Delta},$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{\Delta},$$

$$Z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{\Delta}.$$

Cela posé, l'équation de la droite qui joint l'origine au pôle est

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \lambda.$$

En exprimant que le point (x, y, z) est dans le plan (19), on a

$$\lambda = \frac{1}{3\Delta};$$

donc les coordonnées de ce point sont

$$x = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{3\Delta},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3\Delta},$$

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3\Delta}.$$

Donc : *la droite qui joint le centre d'une surface du second degré à centre unique au pôle du plan qui passe par les extrémités de trois diamètres conjugués est coupée au tiers de sa longueur par ce plan, et ce point est le centre de gravité du triangle des trois extrémités.*

Pour avoir le lieu de ces pôles, il suffit d'élever au carré les équations (20) et de les ajouter; on a ainsi

$$P^2 + P'^2 + P''^2 = 3.$$

C'est une surface homothétique et concentrique à la première, le rapport d'homothétie étant $\sqrt{3}$.

8. Formons la somme des carrés des aires des trois faces du tétraèdre; en appelant A_1, A_2, A_3 ces aires, nous avons

$$4A_1^2 = d_2^2\, d_3^2 \sin^2(2.3):$$

or

$$\sin^2(2,3) = 1 - \frac{(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)^2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)},$$

et, si l'on se rappelle les valeurs de d_1, d_2, d_3, on voit que

$$4A_1^2 = \frac{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) - (x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)^2}{\Delta^4}$$

ou bien

$$4A_1^2 = \frac{(y_2z_3 - z_2y_3)^2 + (z_2x_3 - x_2z_3)^2 + (x_2y_3 - y_2x_3)^2}{\Delta^4}.$$

Or

$$\begin{aligned}
y_2 z_3 - z_2 y_3 &= \Delta(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha''),\\
z_2 x_3 - x_2 z_3 &= \Delta(b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha''),\\
x_2 y_3 - y_2 x_3 &= \Delta(c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'');
\end{aligned}$$

donc

$$4\mathrm{A}_1^2 = \frac{\Delta^2}{\Delta^4}\left[(a^2 + b^2 + c^2)\alpha^2 + (a'^2 + b'^2 + c'^2)\alpha'^2 + \ldots\right],$$

et, en formant de même $4\mathrm{A}_2^2$ et $4\mathrm{A}_3^2$, puis ajoutant, on a

$$\begin{aligned}
&4(\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + \mathrm{A}_3^2)\\
&\quad = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2 + a''^2 + b''^2 + c''^2}{\Delta^2},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$4(\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + \mathrm{A}_3^2) = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{A}''}{\Delta^2}.$$

9. Cela posé, si l'on appelle ρ_1, ρ_2, ρ_3 les trois demi-axes, on a

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{A}''}{\mathrm{D}}, \qquad \mathrm{D} = \Delta^2,$$

$$\rho_2^2\rho_3^2 + \rho_3^2\rho_1^2 + \rho_1^2\rho_2^2 = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{A}''}{\mathrm{D}},$$

$$\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2 = \frac{1}{\mathrm{D}},$$

où D désigne le discriminant du cône des directions asymptotiques, et où

$$\mathcal{A} = \mathrm{A}'\mathrm{A}'' - \mathrm{B}^2, \quad \mathcal{A}' = \mathrm{A}''\mathrm{A} - \mathrm{B}'^2, \quad \mathcal{A}'' = \mathrm{A}\mathrm{A}' - \mathrm{B}''^2.$$

L'équation qui donne les carrés des trois demi-axes est donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\rho^6 - (\mathrm{A}'\mathrm{A}'' + \mathrm{A}''\mathrm{A} + \mathrm{A}\mathrm{A}' - \mathrm{B}^2 - \mathrm{B}'^2 - \mathrm{B}''^2)\rho^4&\\
+ (\mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{A}'')\rho^2 - 1 = 0.&
\end{aligned}$$

L'équation en $\frac{1}{\rho^2}$ est bien connue sous le nom d'équation en S.

10. N'oublions pas que $\mathcal{A}+\mathcal{A}'+\mathcal{A}''$ est la somme des carrés des neuf déterminants mineurs de Δ et que $A+A'+A''$ est la somme des carrés des neuf coefficients $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$.

Il résulte de là que les deux ellipsoïdes

$$(ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2+(a''x+b''y+c''z)^2=1,$$
$$(ax+a'y+a''z)^2+(bx+b'y+b''z)^2+(cx+c'y+c''z)^2=1$$

sont égaux (Jacobi); car l'équation en ρ^2 est la même pour ces deux surfaces.

11. Il serait facile d'obtenir les coefficients directeurs des diamètres conjugués de cette seconde surface. Dans l'expression de x, on ferait des permutations circulaires sur les lettres a, b, c et non sur leurs accents; on aurait ainsi

$$x_1=(b'c'')\alpha+(c'a'')\beta-(a'b'')\gamma,$$
$$y_1=(b''c)\alpha-(c''a)\beta+(a''b)\gamma,$$
$$z_1=(bc')\alpha+(ca')\beta-(ab')\gamma,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On pourrait faire de nombreuses applications de ce qui précède; nous n'en donnerons plus que deux pour montrer comment ces formules s'appliquent à la résolution de certains problèmes.

Premier problème. — *On considère deux surfaces du second degré à centre. Par le centre de l'une d'elles, on mène trois droites parallèles à trois diamètres conjugués de la seconde. On demande le lieu du pôle du plan des trois extrémités.*

Soient

$$(1)\qquad ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy=1$$

l'équation de la première surface, et

$$(2)\qquad A x^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

l'ensemble des termes du second degré dans l'équation de la seconde.

Appelons $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3$ les points où les trois parallèles aux diamètres conjugués de la seconde surface percent la première, et $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ leurs coefficients directeurs. On a

$$X_1 = \frac{x_1}{\rho_1}, \quad Y_1 = \frac{y_1}{\rho_1}, \quad Z_1 = \frac{z_1}{\rho_1},$$
$$\rho_1^2 = a x_1^2 + a' y_1^2 + \ldots + 2b'' x_1 y_1$$

et des formules analogues pour les coordonnées des deux autres extrémités.

Le pôle du plan qui passe par les trois points ainsi déterminés est à l'intersection des trois plans tangents en ces points

$$x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + z_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2\rho_1,$$
$$x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + z_2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2\rho_2,$$
$$x_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y_3 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + z_3 \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2\rho_3,$$

ou, en remplaçant $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ par leurs expressions et posant

$$2X = (b'c'') \frac{\partial\varphi}{\partial x} + (c'a'') \frac{\partial\varphi}{\partial y} + (a'b'') \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$
$$2Y = (b''c) \frac{\partial\varphi}{\partial x} + (c''a) \frac{\partial\varphi}{\partial y} + (a''b) \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$
$$2Z = (bc') \frac{\partial\varphi}{\partial x} + (ca') \frac{\partial\varphi}{\partial y} + (ab') \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

on a

$$\alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z = \rho_1,$$
$$\beta X + \beta' Y + \beta'' Z = \rho_2,$$
$$\gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z = \rho_3.$$

Elevant ces trois égalités au carré et ajoutant, on a

$$X^2+Y^2+Z^2 = a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + a''\mathcal{A}'' + 2b\mathcal{B} + 2b'\mathcal{B}' + 2b''\mathcal{B}''.$$

Le lieu est donc une surface du second degré, concentrique à la surface donnée, et ayant pour plans diamétraux les trois plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

Deuxième problème. — *On donne les extrémités de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde de révolution; trouver le lieu décrit par le centre de cet ellipsoïde.*

Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques, que nous fixerons dans la suite; et soient $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3$ les coordonnées des trois points donnés A_1, A_2, A_3, comme extrémités des trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Appelons x, y, z les coordonnées du centre. L'équation de cet ellipsoïde sera de la forme

$$(1)\quad A(X-x)^2 + A'(Y-y)^2 + \ldots + 2B''(X-x)(Y-y) = 1.$$

Cela posé, appelons $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ les coefficients directeurs des trois diamètres conjugués déterminés comme nous l'avons dit; nous aurons

$$\lambda x_1 = X_1 - x,\quad \lambda y_1 = Y_1 - y,\quad \lambda z_1 = Z_1 - z.$$

Or, si l'on met x_1, y_1, z_1 à la place de $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ dans le premier membre de (1), il se réduit à Δ^2; on a donc

$$\lambda^2\Delta^2 = 1,\quad \text{ou}\quad \lambda = \frac{1}{\Delta},$$

donc

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \Delta(X_1 - x), & y_1 = \Delta(Y_1 - y), & z_1 = \Delta(Z_1 - z), \\ x_2 = \Delta(X_2 - x), & y_2 = \Delta(Y_2 - y), & z_2 = \Delta(Z_2 - z), \\ x_3 = \Delta(X_3 - x), & y_3 = \Delta(Y_3 - y), & z_3 = \Delta(Z_3 - z). \end{cases}$$

(Le signe qu'on doit prendre pour Δ dans chaque système de trois formules n'est pas déterminé; mais nous n'aurons pas besoin de le faire.)

Telles sont les expressions des coefficients directeurs de nos trois diamètres conjugués.

En tenant compte des relations (9), on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Delta^2[(X_1-x)^2+(X_2-x)^2+(X_3-x)^2] = A'A''-B^2,\\
&\Delta^2[(Y_1-y)^2+(Y_2-y)^2+(Y_3-y)^2] = A''A-B'^2,\\
&\Delta^2[(Z_1-z)^2+(Z_2-z)^2+(Z_3-z)^2] = AA'-B''^2,\\
&\Delta^2[(Y_1-y)(Z_1-z)+(Y_2-y)(Z_2-z)\\
&\qquad\qquad +(Y_3-y)(Z_3-z)] = B'B''-AB,\\
&\Delta^2[(Z_1-z)(X_1-x)+\ldots] = B''B-A'B',\\
&\Delta^2[(X_1-x)(Y_1-y)+\ldots] = BB'-A''B''.
\end{aligned}\right.$$

Ces relations étant homogènes en A, A′, A″, B, B′, B″, Δ^2, on peut faire $\Delta^2 = 1$. Nos relations peuvent alors s'écrire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Sigma X_1^2-2x\Sigma X_1+3x^2 = A'A''-B^2,\\
&\Sigma Y_1^2-2y\Sigma Y_1+3y^2 = A''A-B'^2,\\
&\Sigma Z_1^2-2z\Sigma Z_1+3z^2 = AA'-B''^2,\\
&\Sigma Y_1Z_1-z\Sigma Y_1-y\Sigma Z_1+3yz = B'B''-AB,\\
&\Sigma Z_1X_1-x\Sigma Z_1-z\Sigma X_1+3zx = B''B-A'B',\\
&\Sigma X_1Y_1-x\Sigma Y_1-y\Sigma X_1+3xy = BB'-A''B''.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (3) montrent qu'il faut prendre pour axes de coordonnées trois droites rectangulaires passant au centre de gravité des trois points A_1, A_2, A_3, telles que les axes Ox et Oy soient, dans le plan des trois points, les axes principaux d'inertie de ces trois points considérés comme ayant même masse. On a alors

$$\Sigma X_1 = \Sigma Y_1 = \Sigma Z_1 = 0,$$
$$\Sigma Y_1Z_1 = \Sigma Z_1X_1 = \Sigma X_1Y_1 = 0,$$
$$\Sigma Z_1^2 = 0.$$

Désignant en outre les deux moments principaux d'inertie par $3k^2$ et $3l^2$, nous aurons, en divisant chacun des coefficients du cône des directions asymptotiques par 3,

$$(4)\quad \begin{cases} x^2+k^2 = A'A'' - B^2, \\ y^2+l^2 = A''A - B'^2, \\ z^2 = AA' - B''^2, \\ yz = B'B'' - AB, \\ zx = B''B - A'B', \\ xy = BB' - A''B''. \end{cases}$$

D'ailleurs la condition nécessaire et suffisante pour que la surface du second degré soit un carré parfait, c'est qu'on puisse trouver une valeur de S pour laquelle les six équations qui suivent aient lieu simultanément

$$\begin{aligned} &B'B'' - (A-S)B = 0, \quad (A''-S)(A'-S) - B^2 = 0, \\ &B''B - (A-S)B' = 0, \quad (A-S)(A''-S) - B'^2 = 0, \\ &BB' - (A''-S)B'' = 0, \quad (A'-S)(A-S) - B''^2 = 0. \end{aligned}$$

En tenant compte de ces relations, les relations (4) deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} x^2+k^2 = S(A'+A'') - S^2, \\ y^2+l^2 = S(A''+A) - S^2, \\ z^2 = S(A+A') - S^2, \\ yz = -SB, \\ zx = -SB', \\ xy = -SB''. \end{cases}$$

On peut multiplier tous les coefficients de l'équation du cône asymptotique par un même nombre S et l'on a (car S n'est pas nul)

$$(6)\quad \begin{cases} x^2+k^2 = A' + A'' - S^2, \\ y^2+l^2 = A'' + A - S^2, \\ z^2 = A + A' - S^2, \\ yz = -B, \qquad zx = -B', \quad xy = -B''. \end{cases}$$

Pour obtenir les conditions de révolution, on examine deux cas : d'abord celui où aucun des coefficients B n'est nul ; dans ce cas, les conditions de révolution sont

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''};$$

ensuite le cas où l'un des coefficients B est nul, $B = 0$ par exemple : il faut alors qu'un autre des coefficients B soit nul, $B' = 0$ par exemple, et qu'on ait en outre

$$(A - A'')(A' - A'') - B''^2 = 0.$$

Dans le premier cas, on a

$$A + x^2 = A' + y^2 = A'' + z^2.$$

En tenant compte des premières relations, on aurait

$$k = l = 0,$$

ce qui n'est pas.

Il faut donc se placer dans le second cas ; alors z est nul et $B'' = -xy$; des trois premières relations (6), on tire par soustraction

$$x^2 - z^2 + k^2 = A'' - A',$$
$$y^2 - z^2 + l^2 = A'' - A'.$$

On a donc

$$(A'' - A)(A'' - A') - B''^2$$
$$= (x^2 - z^2 + k^2)(y^2 - z^2 + l^2) - x^2y^2 = 0,$$

et, comme $z = 0$, on a pour le lieu des centres la conique imaginaire

$$z = 0, \quad l^2x^2 + k^2y^2 + l^2k^2 = 0.$$

Si l'on suppose $B = 0$, $B'' = 0$, on a en second lieu la conique

$$y = 0, \quad l^2x^2 + (l^2 - k^2)z^2 - l^2(l^2 - k^2) = 0;$$

et enfin, pour $B' = 0$, $B'' = 0$, on a la conique

$$x = 0, \quad k^2 y^2 + (k^2 - l^2) z^2 - k^2(k^2 - l^2) = 0.$$

Ainsi le lieu des centres se compose de ces trois coniques. Si nous supposons $l > K$, la première est une ellipse imaginaire ayant pour axes Ox, Oy ; la seconde une ellipse réelle ayant pour axes Ox, Oz ; la troisième une hyperbole ayant pour axes Oy, Oz. Ce sont les trois focales de l'ellipsoïde infiniment aplati

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{0.} + 1 = 0.$$

Tétraèdres polaires des surfaces du second degré.

12. Nous allons donner rapidement des expressions analogues pour les coordonnées homogènes des quatre sommets d'un tétraèdre polaire quelconque d'une surface du second degré

$$(1) \qquad P^2 + P'^2 + P''^2 P'''_2 = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
P &\equiv a\ x + b\ y + c\ z + dt,\\
P' &\equiv a'\ x + b' y + c'\ z + d' t,\\
P'' &\equiv a''\ x + b'' y + c'' z + d'' t,\\
P''' &\equiv a''' x + b''' y + c''' z + d''' t.
\end{aligned}$$

Nous désignerons par Δ le déterminant de ces quatre fonctions linéaires, par A, B, C, D, ... ses déterminants mineurs du premier ordre.

Cherchons l'expression de la forme adjointe de (1). C'est ce que devient le premier membre de (1) multiplié par Δ^2, lorsqu'on y fait la substitution linéaire suivante

$$\begin{aligned}
aP + a'P' + a''P'' + a'''P''' &= u,\\
bP + b'P' + b''P'' - b'''P''' &= v,\\
cP + c'P' - c''P'' + c'''P''' &= w,\\
dP + d'P' + d''P'' + d'''P''' &= p.
\end{aligned}$$

De ces équations, on tire

$$\begin{aligned}
\Delta P &= A u + B v + C w + D p,\\
\Delta P' &= A' u + B' v + C' w + D' p,\\
\Delta P'' &= A'' u + B'' v + C'' w + D'' p,\\
\Delta P''' &= A''' u + B''' v + C''' w + D''' p.
\end{aligned}$$

Or la forme adjointe est

$$\Delta^2(P^2 + P'^2 + P''^2 + P'''^2);$$

c'est donc

$$\Sigma A^2 u^2 + \Sigma B^2 v^2 + \ldots + 2\Sigma CD wp.$$

Nous désignerons les coefficients de l'équation tangentielle de la surface donnée par

$$\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}, \mathcal{A}_{33}, \mathcal{A}_{44}, \mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{13}, \mathcal{A}_{14}, \mathcal{A}_{23}, \mathcal{A}_{24}, \mathcal{A}_{34}.$$

Cela fait, introduisons les seize quantités

$$\begin{matrix}
\alpha, \beta, \gamma, \delta, & \alpha', \beta', \gamma', \delta',\\
\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'', & \alpha''', \beta''', \gamma''', \delta'''
\end{matrix}$$

satisfaisant aux dix relations suivantes

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \alpha'''^2 = 1,\\
&\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + \beta'''^2 = 1,\\
&\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 + \gamma'''^2 = 1,\\
&\delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2 + \delta'''^2 = 1,\\
&\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\gamma\delta + \gamma'\delta' + \gamma''\delta'' + \ldots = 0,
\end{aligned}\right.$$

et prenons le système pour lequel le déterminant de ces seize quantités est égal à $+1$; alors chacun des déterminants mineurs de ce déterminant est égal à l'élément correspondant.

D'ailleurs on a identiquement

$$P^2 + P'^2 + P''^2 + P'''^2 = Q^2 + Q'^2 + Q''^2 + Q'''^2,$$

où

$$\begin{aligned}
Q &= \alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'' + \alpha''' P''', \\
Q' &= \beta P + \beta' P' + \beta'' P'' + \beta''' P''', \\
Q'' &= \gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P'' + \gamma''' P''', \\
Q''' &= \delta P + \delta' P' + \delta'' P'' + \delta''' P'''.
\end{aligned}$$

Les plans $Q = 0$, $Q' = 0$, $Q'' = 0$, $Q''' = 0$ sont les quatre faces d'un tétraèdre polaire quelconque de la surface. En prenant les points de rencontre de ces plans trois à trois, on a les quatre sommets. Laissons de côté la première équation et prenons les trois équations suivantes

$$\begin{aligned}
\beta P + \beta' P' + \beta'' P'' + \beta''' P''' &= 0, \\
\gamma P + \gamma' P' + \gamma'' P'' + \gamma''' P''' &= 0, \\
\delta P + \delta' P' + \delta''' P'' + \delta''' P''' &= 0.
\end{aligned}$$

Elles donnent

$$\frac{P}{\alpha} = \frac{P'}{\alpha'} = \frac{P''}{\alpha''} = \frac{P'''}{\alpha'''}.$$

Nous prendrons

$$\begin{aligned}
a x_1 + b y_1 + c z_1 + d t_1 &= \alpha, \\
a' x_1 + b' y_1 + c' z_1 + d' t_1 &= \alpha', \\
a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1 + d'' t_1 &= \alpha'', \\
a''' x_1 + b''' y_1 + c''' z_1 + d''' t_1 &= \alpha''',
\end{aligned}$$

x_1, y_1, z_1, t_1 étant les quatre coordonnées homogènes du premier sommet. Ces équations, résolues par rapport à x_1, y_1, z_1, t_1, donnent un des systèmes de valeurs des quatre coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1 :

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= A\alpha + A'\alpha' + A''\alpha'' + A'''\alpha''', \\
y_1 &= B\alpha + B'\alpha' + B''\alpha'' + B'''\alpha''', \\
z_1 &= C\alpha + C'\alpha' + C''\alpha'' + C'''\alpha''', \\
t_1 &= D\alpha + D'\alpha' + D''\alpha'' + D'''\alpha'''.
\end{aligned}\right.$$

On aurait de même les coordonnées des trois autres sommets en mettant successivement β, γ, δ à la place de α.

On en déduit immédiatement, en tenant compte des relations (2), les dix relations suivantes

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= \mathcal{A}_{11},\\
y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 &= \mathcal{A}_{22},\\
z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 &= \mathcal{A}_{33},\\
t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 &= \mathcal{A}_{44},\\
x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 &= \mathcal{A}_{12},\\
x_1 z_1 + x_2 z_2 - x_3 z_3 + x_4 z_4 &= \mathcal{A}_{13},\\
x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3 + x_4 t_4 &= \mathcal{A}_{14},\\
y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 + y_4 z_4 &= \mathcal{A}_{23},\\
y_1 t_1 - y_2 t_2 + y_3 t_3 - y_4 t_4 &= \mathcal{A}_{24},\\
z_1 t_1 + z_2 t_2 - z_3 t_3 + z_4 t_4 &= \mathcal{A}_{34}.
\end{aligned}
\right.
$$

On en déduit aussi les formules suivantes

$$
(5)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\Delta\alpha = P_1, & \Delta\alpha' = P'_1, & \Delta\alpha'' = P''_1, & \Delta\alpha''' = P'''_1,\\
\Delta\beta = P_2, & \Delta\beta' = P'_2, & \Delta\beta'' = P''_2, & \Delta\beta''' = P'''_2,\\
\Delta\gamma = P_3, & \Delta\gamma' = P'_3, & \Delta\gamma'' = P''_3, & \Delta\gamma''' = P'''_3,\\
\Delta\delta = P_4, & \Delta\delta' = P'_4, & \Delta\delta'' = P''_4, & \Delta\delta''' = P'''_4.
\end{array}
\right.
$$

On déduit aisément de ces formules que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface

$$A_{11} x^2 + A_{22} y^2 + \ldots + 2 A_{34} z t = 0$$

soit circonscrite à une infinité de tétraèdres polaires de la surface

$$\mathcal{A}_{11} u^2 + \mathcal{A}_{22} v^2 + \ldots + 2 \mathcal{A}_{34} w p = 0$$

est

$$A_{11} \mathcal{A}_{11} + A_{22} \mathcal{A}_{22} + \ldots + 2 A_{34} \mathcal{A}_{34} = 0.$$

C'est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que la seconde surface soit inscrite dans une infinité de tétraèdres polaires de la première.
