NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HALPHEN

Sur un critérium relatif à la théorie des sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 5-7

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

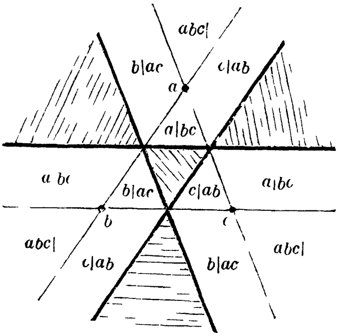
MATHÉMATIQUES.

SUR UN CRITÉRIUM RELATIF A LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. HALPHEN.

On détermine une conique par trois de ses points et par son centre, et il s'agit de distinguer les cas où cette conique est une ellipse de ceux où elle est une hyperbole.

Pour résoudre cette question, Steiner a donné le critérium suivant : *Soient a, b, c les trois points, tracez les trois droites qui joignent deux à deux les milieux*



des segments ab, bc, ca. Ces trois droites partagent le plan en sept régions, dont quatre ne contiennent aucun des points a, b, c. Si le centre est dans une quelconque *de ces quatre régions, la conique est une ellipse ; s'il est dans une quelconque des trois autres, la conique est une hyperbole.*

Dans la figure ci-contre, les quatre premières régions sont distinguées par des hachures qui les couvrent.

Voici maintenant une seconde question qui se présente ici :

Le centre étant placé de telle sorte que la conique soit une hyperbole, on demande de distinguer la répartition des trois points entre les deux branches de cette hyperbole ;

et voici la réponse :

Chacune des trois régions qui contiennent a, b ou c est subdivisée en quatre parties par les trois droites ab, bc, ca, savoir : un triangle, un angle, et deux bandes comprises entre deux droites parallèles.

Si le centre est dans un angle, les trois points sont sur une même branche de l'hyperbole.

Si le centre est dans un triangle, celui des trois points qui est un sommet de ce triangle est sur une branche, les deux autres sur l'autre branche.

Si le centre est dans une bande, les points sont répartis de la même manière que pour le triangle qui a un angle opposé par le sommet à l'un de ceux qui limitent cette bande.

Sur la figure, la répartition est représentée par un trait qui sépare les points appartenant à une branche de ceux qui appartiennent à l'autre branche. Ainsi $a \mid bc$ signifie que a est sur une branche, b et c sur l'autre.

Envisageons maintenant les mêmes questions pour une conique déterminée par trois de ses tangentes, et son centre.

Tout ce qui précède s'applique exactement à ce nouveau problème, pourvu que l'on envisage les droites *ab*, *bc*, *ca* comme étant les tangentes données. Pour la répartition des tangentes entre les branches d'hyperbole, on devra considérer *a* comme désignant la droite *bc*, *b* la droite *ca*, *c* la droite *ab*.

Remarquons, en terminant, cette conséquence : *Sur une même branche d'hyperbole on prend trois points quelconques. Le centre de la courbe est toujours dans un des angles opposés par le sommet à ceux du triangle formé par les trois points. Il est aussi dans un des angles opposés par le sommet à ceux du triangle formé par les tangentes en ces trois points.*