Nouvelles annales de mathématiques

H. Resal

Sur la détermination de quelques intégrales indéfinies

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 529-537

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__529_0>

SUR LA DÉTERMINATION DE QUELQUES INTÉGRALES INDÉFINIES;

PAR M. H. RESAL.

1. La racine carrée d'un trinôme du second degré peut toujours se mettre sous l'une des trois formes suivantes :

$$\sqrt{1+x^2}, \quad \sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{x^2-1}.$$

Cela posé, désignons par $f(x)$ une fonction quelconque de x.

2. Soient

$$X = \int f(x)\sqrt{1+x^2}\,dx, \quad X_1 = \int \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

On a, en ayant recours à la méthode d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2 f(x)\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= X_1 + \frac{1}{2}\int \frac{x\,f(x)\,dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = X_1 + \int x f(x)\,d\sqrt{1+x^2}, \\ &= X_1 + x f(x)\sqrt{1+x^2} - \int [f(x) + x f'(x)]\sqrt{1+x^2}\,dx; \end{aligned}$$

d'où

$$(1) \qquad 2X = X_1 + x f(x)\sqrt{1+x^2} - \int x f'(x)\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Si nous posons

$$(2) \qquad x f'(x) = \varphi'(x),$$

cette équation donne, en intégrant encore une fois par parties,

$$(3) \qquad 2X = X_1 + [x f(x) - \varphi(x)]\sqrt{1+x^2} + \int \frac{x\,\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On voit ainsi que **X** dépend de l'intégrale $\mathbf{X}_1$, et d'une seconde intégrale de même nature que la précédente.

Exemples :

1° $f(x) = 1$. L'équation (1) donne [1]

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + x\sqrt{1+x^2} \\ &= \log\left[x+\sqrt{1+x^2}\right] + x\sqrt{1+x^2}. \end{aligned} \right.$$

Cette méthode est plus expéditive que celles auxquelles on a généralement recours, puisqu'elle ne fait dépendre l'intégrale X que d'une autre dont on trouve facilement l'expression.

2° $f(x) = x$, pour mémoire, car on voit immédiatement que

$$(5) \qquad 2\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}.$$

3° $f(x) = \frac{1}{x}$. De l'équation (1) on déduit

$$(\alpha) \qquad \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}.$$

En posant

$$\sqrt{1+x^2} = u,$$

---

[1] En posant $x = \operatorname{tang}\theta$, on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = 2\int \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = 2\int \frac{2\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \log \frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} = \log \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right).$$

on trouve successivement

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2\sqrt{1+x^2}} \\ &= \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\log\frac{u-1}{u+1} = \log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.$$

4° $f(x) = x^m$, en désignant par m un nombre quelconque.

On a, d'après la formule (1),

$$\begin{aligned} 2\int x^m \sqrt{1+x^2}\, dx = &\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &+ x^{m+1}\sqrt{1+x^2} - m\int x^m \sqrt{1+x^2}\, dx, \end{aligned}$$

d'où

$$(\beta)\qquad (2+m)\int x^m \sqrt{1+x^2} = \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1+x^2}} + x^{m+1}\sqrt{1+x^2}.$$

Mais on a

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^{m-1}\, dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = \int x^{m-1}\, d\sqrt{1+x^2},$$

d'où, en intégrant par parties,

$$(7)\quad \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = x^{m-1}\sqrt{1+x^2} - (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{1+x^2}\, dx.$$

L'équation (β) devient aussi

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &(2+m)\int x^m \sqrt{1+x^2}\, dx \\ &\quad = x^{m-1}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{1+x^2}\, dx. \end{aligned}\right.$$

Supposons que m soit un nombre pair positif; on voit, d'après cette formule, que l'on fera dépendre

$$\begin{array}{lcl} \int x^m \sqrt{1+x^2}\, dx & \text{de} & \int x^{m-2}\sqrt{1+x^2}\, dx, \\ \int x^{m-2} \sqrt{1+x^2}\, dx & \text{de} & \int x^{m-4}\sqrt{1+x^2}\, dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \int x^2 \sqrt{1+x^2}\, dx & \text{de} & \int \sqrt{1+x^2}\, dx. \end{array}$$

Or, comme nous savons déterminer la dernière de ces intégrales, on trouvera sans difficulté l'expression de la première.

Si m est positif et impair, on voit, en opérant comme ci-dessus, que l'intégrale du premier membre de l'équation (8) ne dépendra finalement que de la suivante

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx,$$

dont l'expression est connue.

Supposons maintenant que m soit un nombre entier négatif et posons $m-2=-n$; la formule (8) donne

$$(n-1)\int x^{-n}\sqrt{1+x^2}\,dx$$
$$=-x^{-n+1}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+(4-n)\int x^{(n-2)}\sqrt{1+x^2}\,dx;$$

et l'on voit que, selon que n sera pair ou impair, on sera conduit finalement à

$$\int\sqrt{1+x^2}dx \quad \text{ou} \quad \int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx,$$

intégrales que nous savons déterminer.

D'après ce qui précède, on voit que, si m est un nombre entier positif ou négatif, l'intégrale du premier membre de l'équation (7) s'obtiendra sans difficulté.

3. Soient

$$X=\int f(x)\sqrt{1-x^2}dx,\quad X_1=\int\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

On a

$$X=\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int x^2\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=X_1+\int xf(x)\,d\sqrt{1-x^2}$$
$$=X_1+xf(x)\sqrt{1-x^2}-\int[f(x)+xf'(x)]\,dx;$$

d'où

$$(9)\qquad 2X=X_1+xf(x)\sqrt{1-x^2}-\int xf'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

équation identique à l'équation (1), à la condition de remplacer, sous le radical, dans cette dernière, $+x^2$ par $-x^2$.

Exemples :

1° $f(x) = 1$. La formule (9) donne

$$(10) \qquad 2\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \arc\sin x + x\sqrt{1-x^2}.$$

2° $f(x) = x$ (pour mémoire). On a

$$(11) \qquad 2\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

3° $f(x) = \frac{1}{x}$. On a, d'après la formule (9),

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}.$$

Si nous posons

$$\sqrt{1-x^2} = u,$$

nous aurons

$$(12)\left\{\begin{aligned} &\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\int\frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\log\frac{(1-u)}{1+u} = \log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right.$$

par suite

$$(13) \qquad \int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1-x^2}.$$

4° $f(x) = x^m$. Lorsque m est un nombre entier positif et négatif, le mode de réduction des intégrales indiqué à la fin du numéro précédent est applicable ici, et nous n'avons pas à insister sur ce point.

4. **Soit**

$$X = \int f(x)\sqrt{x^2-1}\,dx, \quad X_1 = \int \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Nous avons

$$X = -\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{x^2 f(x)\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = -X_1 + \int x f(x)\,d\sqrt{x^2-1}$$
$$= -X_1 + x f(x)\sqrt{x^2-1} - \int [f(x) + x f'(x)]\sqrt{x^2-1}\,dx;$$

d'où

$$(13) \qquad 2X = -X_1 + x f(x)\sqrt{x^2-1} - \int x f(x)\sqrt{x^2-1}\,dx.$$

Exemples :

1° $f(x) = 1$. L'équation (13) donne

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &2\int \sqrt{x^2-1}\,dx = -\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ &\quad + x\sqrt{x^2-1} = -\log\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + x\sqrt{x^2-1}. \end{aligned} \right.$$

2° $f(x) = x$ (pour mémoire). On a

$$(15) \qquad 2\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-1}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}.$$

3° $f(x) = \frac{1}{x}\cdot$ La formule (13) donne

$$2\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = -\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} + \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx;$$

---

(1) En posant $x = \frac{1}{\sin\theta}$, on a

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{\sin\theta} = \int \frac{\dfrac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\theta}}{\tang\frac{\theta}{2}}$$
$$= \log\tang\frac{\theta}{2} = \log\frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta} = \log\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).$$

d'où

$$(\gamma)\qquad \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = -\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1}.$$

En posant $x = \frac{1}{\sin\theta}$, on reconnaît facilement que l'intégrale du second membre de cette équation, prise avec son signe, a pour valeur θ. On a donc

$$(16)\qquad \int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \arc\sin\frac{1}{x} + \sqrt{x^2-1}.$$

4° L'intégrale

$$\int x^m\sqrt{x^2-1}\,dx,$$

dans laquelle m est un nombre entier positif ou négatif, se réduira en suivant la marche indiquée à la fin du n° 2.

5. Nous allons maintenant chercher à exprimer, au moyen de transcendantes connues, les intégrales des racines carrées des fonctions trigonométriques. Il est évident que, dans tous les cas, on est ramené à considérer les trois intégrales suivantes :

$$\int\sqrt{\sin x}\,dx,\quad \int\sqrt{\frac{1}{\sin x}}\,dx,\quad \int\sqrt{\tang x}\,dx,$$

les deux premières supposant des limites comprises entre zéro et π, et la troisième entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

6. Si nous posons $\sin x = \cos^2\theta$, nous avons

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\sin x}\,dx &= -2\int\frac{\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\cos^4\theta}} = -2\int\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\\ &= 2\left(-\int\sqrt{1+\cos^2\theta}\,d\theta + \int\frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\right),\end{aligned}$$

et enfin

$$(17)\qquad \int\sqrt{\sin x}\,dx = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} - \sqrt{2}\int\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta}\,d\theta\right).$$

On est ainsi ramené à deux intégrales elliptiques qui sont respectivement de la première et de la seconde espèce.

7. En continuant à poser $\sin x = \cos^2\theta$, nous avons

$$\int \sqrt{\frac{1}{\sin x}}\, dx = -2\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\cos^4\theta}} = -2\int \frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}},$$

ou

$$(18) \qquad \int \sqrt{\frac{1}{\sin x}}\, dx = -\sqrt{2}\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}},$$

ce qui est une intégrale elliptique de la première espèce.

En retranchant l'une de l'autre les équations (17) et (18), on trouve

$$(19) \qquad \int \frac{1-\sin x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = 2^{\frac{3}{2}}\int \sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta}\, d\theta.$$

8. Considérons maintenant l'intégrale

$$X = \int \sqrt{\operatorname{tang} x}\, dx.$$

En posant

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}^2\theta,$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned}
X &= 2\int \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta} = 2\int \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{1-2\sin^2\theta\cos^2\theta} \\
&= \int \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{1-\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta} + \int \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{1+\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{1-\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta} + \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{1+\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta} \\
&\quad - \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1-\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1+\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d\operatorname{tang}\theta}{\left(\operatorname{tang}\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{1}{2}\int \frac{d\operatorname{tang}\theta}{\left(\operatorname{tang}\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\log \frac{1-\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}}{1+\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

et enfin

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}\int\sqrt{\operatorname{tang} x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[&\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{2}\operatorname{tang}\theta - 1\right)\\ &+ \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{2}\operatorname{tang}\theta + 1\right)\\ &+ \log\left(\frac{\sqrt{2}-\sin 2\theta}{\sqrt{2}+\sin 2\theta}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\Big].\end{aligned}\right.$$