

## **Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 20  
(1881), p. 175-185

<[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1881\\_2\\_20\\_\\_175\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__175_1)>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Question 1275*

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 375);

PAR M. R.-W. GENÈSE.

*On donne quatre points  $a, b, c, d$  dans un plan et deux points  $\rho, \rho'$ , non situés dans ce plan.*

*Les droites d'intersection de deux couples de plans  $(\rho ab), (\rho' cd)$  et  $(\rho cd), (\rho' ab)$  sont dans un même plan  $(P)$ ; on peut obtenir six plans analogues en combinant de toutes les manières possibles les points  $a, b, c, d$ ;*

ces six plans se coupent suivant une même droite (D)  
qui rencontre  $\rho\zeta'$ . (GENTY.)

Un point est donné par les rapports  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  des aires des tétraèdres  $P_\rho BC, P_\rho CA, P_\rho AB$  et  $PABC$  à l'aire de  $\rho abc$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  les coordonnées de  $\zeta'$ ;  $p, q, r, o$  celles de  $d$ . Les coordonnées de  $a, b, c, \rho$  sont

$$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \text{ et } (0, 0, 0, 1).$$

Alors l'équation du plan  $\rho ab$  est

$$(1) \quad \gamma = 0;$$

celle de  $\rho'cd$  est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(2) \quad (p\beta_1 - q\alpha_1)\delta + \delta_1(q\alpha - p\beta) = 0.$$

Le plan  $\rho'ab$  est représenté par

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(3) \quad \delta_1\gamma - \gamma_1\delta = 0,$$

et  $\rho cd$  par

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(4) \quad q\alpha - p\beta = 0.$$

Le plan

$$(p\beta_1 - q\alpha_1)(\gamma_1\delta - \delta_1\gamma) + \gamma_1\delta_1(q\alpha - p\beta) = 0$$

contient les intersections de (1) avec (2) et de (3) avec (4). Alors c'est un des plans de la question. Il y en a deux autres :

$$(q\gamma_1 - r\beta_1)(\alpha_1\delta - \delta_1\alpha) + \alpha_1\delta_1(r\beta - q\gamma) = 0$$

et

$$(r\alpha_1 - p\gamma_1)(\beta_1\delta - \delta_1\beta) + \beta_1\delta_1(p\gamma - r\alpha) = 0.$$

Les premiers membres de ces équations s'annulent par addition. Alors les trois plans passent par une même droite.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

### Question 1313

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 335);

PAR M. S. REALIS.

*Un nombre p, qui est la somme de n cubes entiers, étant donné, assigner un nombre q tel que le produit p<sup>2</sup>q soit la somme algébrique de n cubes entiers.*

Soit

$$p = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \dots + \alpha_n^3,$$

et posons

$$P_1 = 2\alpha_1^3 + 3\alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2) - (\alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \dots + \alpha_n^3),$$

$$P_2 = 2\alpha_2^3 + 3\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2) - (\alpha_1^3 + \alpha_3^3 + \dots + \alpha_n^3),$$

.....

$$P_n = 2\alpha_n^3 + 3\alpha_n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2)$$

$$- (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \dots + \alpha_{n-1}^3),$$

$$q = (9 - n)(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \dots + \alpha_n^3)$$

$$+ 9[\alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2) + \dots$$

$$+ \alpha_n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2)].$$

Nous aurons, par identité,

$$p^2q = P_1^3 + P_2^3 + \dots + P_n^3.$$

*Note.* — La solution donnée, dans le numéro de septembre dernier, par M. Marcello Rochetti, ne répond pas aux termes de l'énoncé.

### Question 1342

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 144 et 470);

PAR M. A. LEINEKUGEL.

*D'un point donné M on mène deux droites normales à un paraboloïde; soient a et b leurs pieds,  $\alpha$  le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur la corde ab et  $\beta$  le conjugué harmonique de  $\alpha$  relativement aux points a et b; démontrer que le point  $\beta$  est sur la droite menée par M perpendiculairement à l'axe.*

(LAGUERRE.)

Soit D la droite d'intersection des plans tangents en a et en b. Par cette droite D menons le plan diamétral DN conjugué aux cordes parallèles à ab et le plan DQ parallèle à ab. Ces quatre plans forment un faisceau harmonique, le plan Mab les coupe suivant un faisceau harmonique de quatre droites et les perpendiculaires abaissées du point M sur ces quatre droites forment aussi un faisceau harmonique. La proposition s'en déduit immédiatement, car dans les paraboloïdes tous les plans diamétraux sont parallèles à l'axe.

*Note.* — La même question a été résolue par M. A. Gentil, élève du lycée de Grenoble.

## Question 1344

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 433 );

PAR M. FRANÇOIS LAUDIERO,

Élève de l'Université de Naples.

Soient  $A, B, C, D$  quatre points d'une conique  $(S)$ , et  $M$  un point quelconque; si l'on mène les droites  $MA, MB, MC, MD$  qui rencontrent de nouveau la conique  $(S)$  en des points  $A', B', C', D'$  respectivement, les deux coniques  $(M, A, B, C, D)$ ,  $(M, A', B', C', D')$  auront la même tangente au point  $M$ . (GENTY.)

On sait que, si deux coniques  $\varphi, \varphi'$  se coupent aux points  $A, B, C, D$  et si l'on mène par  $A, B$  respectivement deux droites qui coupent  $\varphi$  en  $F, G$  et  $\varphi'$  en  $F', G'$ , les cordes  $FG, F'G'$  concourent en un point  $H$  de la droite  $CD$ , et il est clair que, si les points  $F', G'$  sont infiniment voisins, la droite  $FG$  et la tangente en  $F'G'$  à la conique  $\varphi'$  se coupent sur la droite  $CD$ .

Cela posé, désignons par  $\psi, \psi'$  les deux coniques

$$(M, A, B, C, D), \quad (M, A', B', C', D')$$

respectivement, et observons que pour les coniques  $(S), \varphi$ , qui se coupent dans les quatre points  $A, B, C, D$ , la tangente à la conique  $\varphi$  en  $M$  et les cordes  $CD, B'A'$  concourent en un même point. De même, pour les coniques  $(S), \varphi'$ , la tangente en  $M$  à la conique  $\varphi'$  et les cordes  $B'A', CD$  concourent en un même point.

Donc les deux tangentes en  $M$  aux coniques  $\varphi, \varphi'$  coïncident, et les coniques  $\varphi, \varphi'$  ont conséquemment la même tangente au point  $M$ .

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; F. Pisani; N. Goffart; A. Droz; J. Marchal; H. Herzog, du lycée de Rouen; E. Perquery, élève du lycée du Havre.

**Question 1348**( voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 480 );PAR M. J. BOUDENES,  
Élève du lycée de Grenoble.*On donne une parabole P et on propose :**1<sup>o</sup> De trouver l'équation du cercle C qui passe par un point M du plan et par les points de contact des tangentes menées de ce point à la parabole ;**2<sup>o</sup> De trouver le lieu des points M pour lesquels ce cercle a un rayon constant ;**3<sup>o</sup> De trouver le lieu du centre de ce cercle de rayon constant ;**4<sup>o</sup> De démontrer que la polaire du point M par rapport à la parabole et la seconde corde d'intersection du cercle et de la parabole se coupent sur une droite déterminée.* (BARBARIN.)

1<sup>o</sup> On sait que les cordes d'intersection de deux coniques à axes parallèles sont également inclinées sur les directions de ces axes. Dès lors, si nous prenons pour origine le foyer de la parabole et pour axe des  $x$  l'axe de cette courbe, son équation sera

$$(1) \quad y^2 = 2px + p^2,$$

et, si  $\alpha$ ,  $\beta$  sont les coordonnées du point M, la polaire de ce point sera représentée par l'équation

$$(2) \quad \beta y - p(\alpha + x) + p^2 = 0.$$

Toute conique passant par l'intersection de la droite précédente et de la parabole, et ayant un axe parallèle à celui de cette dernière, aura par suite une équation de

la forme

$$\left[ \frac{\beta}{p} y - p(x + x) + p^2 \right] \left( y + \frac{p}{n} x + n \right) + \lambda (y^2 - 2p \cdot x - p^2) = 0.$$

Pour que ce soit un cercle, il faut d'abord que

$$\lambda = - \frac{p^2 + \beta^2}{\beta^2},$$

et, pour que ce cercle passe par le point M,

$$n = \frac{p(p - x)}{\beta}.$$

L'équation de ce cercle est donc

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{2 \cdot x}{p} (p^2 + \beta^2) + \frac{2 \beta y}{p} (p - x) \\ \quad - [(p - x)^2 + p^2 + \beta^2] = 0. \end{cases}$$

2° Son rayon a pour valeur la distance du centre au point M. Le lieu du point M pour lequel ce cercle a un rayon constant est donc,  $\alpha$ ,  $\beta$  étant les coordonnées courantes,

$$\left( \frac{p^2 + \beta^2}{p} - \alpha \right)^2 + \left[ \frac{(p - x)\beta}{p} - \beta \right]^2 = R^2$$

ou

$$(p^2 + \beta^2) [(p - x)^2 + \beta^2] = p^2 R^2,$$

équation du quatrième degré qui représente une courbe passant par les points cycliques. Elle devient, si l'on transporte l'origine au point  $x = -p$  sur l'axe des  $x$ ,

$$(4) \quad (p^2 + \beta^2) (x^2 + \beta^2) = p^2 R^2.$$

3° Les coordonnées du centre du cercle de rayon R étant devenues, par la transformation précédente de coordonnées,

$$(5) \quad x = \frac{p^2 + \beta^2}{p}, \quad y = \frac{x\beta}{p},$$

le lieu de ce centre, pour  $R$  constant, a donc pour équation

$$x[y^2 + (x - p)^2] = R^2(x - p),$$

obtenue par l'élimination de  $\alpha$ ,  $\beta$  entre la condition (4) et les équations (5). Ce lieu représente une courbe du troisième degré passant encore par les points circulaires à l'infini.

4° Les deux cordes d'intersection du cercle (3) et de la parabole (1) étant

$$\beta y - p(x + x') + p^2 = 0$$

et

$$\beta y + p x + p(p - x) = 0,$$

on voit aisément, en les retranchant, que le lieu de leur point d'intersection est

$$x = 0,$$

et que, par suite, ces deux droites se coupent toujours sur l'axe des  $x$ , c'est-à-dire sur la perpendiculaire à l'axe menée du foyer.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. H. Lez; Moret-Blanc; Baron, élève du lycée Henri IV; G. Lambiotte, élève de l'École polytechnique de Bruxelles; E. Fauquembergue; A. Geneix-Martin; J. Netter, élève du lycée de Nancy.

### Question 1353

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 528);

PAR M. J.-B. DELACOURCELLE,

Enfant de troupe au 53<sup>e</sup> de ligne, à Tarbes.

*Soient ABC un triangle donné, A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> trois points pris sur les côtés de ce triangle et tels qu'on ait*

$$\frac{A_1 B}{A_1 C} = \frac{l}{m}, \quad \frac{B_1 C}{B_1 A} = \frac{l'}{m'}, \quad \frac{C_1 A}{C_1 B} = \frac{l''}{m''};$$

*l'aire du triangle  $A_1 B_1 C_1$  est égale à l'aire du triangle  $ABC$ , multipliée par*

$$\frac{l'l'' + mm'm''}{(l+m)(l'+m')(l''+m'')}.$$

(GENTY).

Les deux triangles  $AB_1 C_1$  et  $ABC$ , ayant un angle égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{AB_1 C_1}{ABC} &= \frac{AC_1 \times AB_1}{AB \times AC} = \frac{AC_1}{AB} \times \frac{AB_1}{AC} \\ &= \frac{AC_1}{AC_1 + BC_1} \times \frac{AB_1}{AB_1 + CB_1}; \end{aligned}$$

ou bien

$$(1) \quad \frac{AB_1 C_1}{ABC} = \frac{l''}{l''+m''} \times \frac{m'}{l'+m'} = \frac{l'' m'}{(l''+m'')(l'+m')}.$$

On obtient de la même manière

$$(2) \quad \frac{BA_1 C_1}{ABC} = \frac{lm''}{(l''+m'')(l+m)},$$

$$(3) \quad \frac{CA_1 B_1}{ABC} = \frac{l'm}{(l'+m')(l+m)}.$$

Or on a

$$A_1 B_1 C_1 = ABC - AB_1 C_1 - BA_1 C_1 - CA_1 B_1.$$

En portant, dans cette identité, les valeurs de  $AB_1 C_1$ ,  $BA_1 C_1$ ,  $CA_1 B_1$  tirées des égalités (1), (2), (3), on trouve, toute réduction faite,

$$A_1 B_1 C_1 = ABC \times \frac{l'l'' + mm'm''}{(l+m)(l'+m')(l''+m'')}.$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. L. Robert, à Montreuil (Seine); Choudadow, de Strawropole (Caucase); A. Droz, à Porrentruy (Berne); H. Lez; E. Fauquembergue, maître répétiteur.

( 184 )

teur au lycée de Saint-Quentin; F. Pisan, professeur à l'Institut royal technique de Messine; J. Boudènes et Désiré Giroud, élèves du lycée de Grenoble; E. Pecquery et É. Chrétien, élèves du lycée du Havre.

### Question 1356

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 48)

PAR MM. E. PECQUERY ET É. CHRÉTIEN.

Élèves du lycée du Havre.

*Il y a trois cubiques passant par huit points donnés et tangentes à une droite menée par l'un de ces points.*

(E. G.).

L'équation générale d'une cubique contenant neuf paramètres variables, si l'on exprime que la cubique passe par huit points donnés, on aura huit relations qui détermineront huit des paramètres en fonction du neuvième au premier degré. L'équation générale de la cubique ne contiendra donc finalement qu'un seul paramètre variable au premier degré.

Si maintenant on rapporte la cubique à des axes, dont la droite donnée est l'axe des  $x$ , et l'origine le point donné sur cette droite, pour  $y = 0$  on a d'abord  $x = 0$ , puis deux autres racines données par une équation du second degré en fonction du paramètre variable qui y entre au premier degré.

On exprimera que la cubique est tangente à l'axe des  $x$  en écrivant que cette équation du second degré en  $x$  a ses deux racines égales, ce qui donne, en général, une équation du second degré pour déterminer le paramètre variable, ou en exprimant que  $x = 0$  est racine de cette équation, ce qui donne une équation du premier degré pour déterminer le même paramètre. Donc, en

général, il y a trois valeurs pour ce paramètre, et par suite trois cubiques satisfaisant aux conditions données.

*Note.* — M. Dewulf fait remarquer que le théorème peut être généralisé ainsi :

*Dans un faisceau de courbes de l'ordre  $n$ , il y a, en général,  $(n-1-\delta)$  courbes tangentes à une droite qui passe par  $\delta$  points de la base du faisceau, en des points autres que ces  $\delta$  points.*

On peut énoncer un théorème analogue où la droite quelconque est remplacée par une courbe de l'ordre  $m$ .