Nouvelles annales de mathématiques

Laguerre

Sur une propriété du cercle jouissant de la propriété que de chacun de ses points on voit sous un angle droit une conique donnée

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 204-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__204_0>

SUR UNE PROPRIÉTÉ DU CERCLE JOUISSANT DE LA PROPRIÉTÉ QUE DE CHACUN DE SES POINTS ON VOIT SOUS UN ANGLE DROIT UNE CONIQUE DONNÉE;

Par M. LAGUERRE.

---

1. Soient K la conique donnée et C le cercle considéré. Désignons par M un point de ce cercle; les deux tangentes menées de ce point à la conique sont à angle droit; par suite, si l'on mène les deux droites isotropes qui se croisent au point M, et si l'on désigne par α et β les points où ces droites rencontrent la polaire de M relativement à la conique, le triangle $M\alpha\beta$ est conjugué par rapport à cette conique.

Considérons un autre triangle ABC conjugué par rapport à K; d'après un beau théorème dû à M. Hesse, on sait que les triangles $M\alpha\beta$ et ABC sont circonscrits à une même conique. Cette conique a, d'ailleurs, pour foyer le point M, puisque les droites $M\alpha$ et $M\beta$ sont isotropes.

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Étant donné un triangle quelconque ABC, *conjugué par rapport à la conique* K, *et étant pris un point quelconque* M *sur le cercle* C, *la conique inscrite dans le triangle* ABC *et ayant pour foyer le point* M *est tangente à la polaire du point* M *relativement à* K.

Autrement:

Si, d'un point M *pris arbitrairement sur le cercle* C, *on mène des perpendiculaires aux côtés d'un triangle quelconque conjugué par rapport à la conique* K, *le cercle passant par les pieds de ces perpendiculaires passe par un point fixe qui est le pied de la perpendi-*

culaire abaissée du point M *sur sa polaire relativement à* K (*).

2. Lorsque la conique K est une parabole, le cercle C se réduit à la directrice de cette parabole. D'ailleurs, la perpendiculaire abaissée d'un point de la directrice sur sa polaire est le foyer de la courbe.

D'où la proposition suivante :

Étant donné un triangle quelconque conjugué par rapport à une parabole, si, d'un point quelconque de la directrice, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de ce triangle, les trois pieds de ces perpendiculaires sont sur un cercle passant par le foyer de la courbe.

3. Considérons deux points M et M′ situés sur le cercle C, et désignons respectivement par P et P′ leurs polaires relativement à la conique K; soit de plus N le point de rencontre des droites P et P′. D'après ce que j'ai dit plus haut, M et M′ sont les foyers d'une conique tangente aux droites P et P′. Il en résulte, d'après un théorème connu, que les deux droites P et P′ ont même orientation que les droites NM et NM′. D'ailleurs, le cercle C a pour polaire réciproque, par rapport à K, une conique ayant les mêmes foyers que cette conique; c'est une conséquence immédiate de ce fait bien connu que le cercle C passe par les points de contact des droites

---

(*) Cette propriété se rattache à la suivante, que je me contente de mentionner en passant :

Considérons une série de triangles inscrits dans une même conique et circonscrits à une autre conique, puis d'un point fixe M *abaissons des perpendiculaires sur les côtés de chacun de ces triangles. Les divers cercles passant par les pieds de ces perpendiculaires coupent orthogonalement un cercle fixe, tandis que leurs centres décrivent une conique.*

isotropes tangentes à K. Par suite, les droites P et P′ étant tangentes à cette conique homofocale à K, ces deux droites ont la même orientation que les tangentes menées du point N à K. Si l'on remarque maintenant que la droite joignant les points de contact de ces tangentes est la droite MM′ polaire du point N relativement à K, on obtiendra le théorème suivant:

Étant donné un point quelconque du plan N, *sa polaire, par rapport à la conique* K, *coupe cette courbe en deux points* Q, Q′, *et le cercle* C *en deux points* M et M′; *les angles* QNQ′ *et* MQM′ *ont mêmes bissectrices.*

Lorsque la conique est une parabole, la proposition peut s'énoncer de la façon suivante:

Si, d'un point quelconque N *du plan, on mène deux tangentes à une parabole, et si l'on désigne par* A et B *leurs points de contact, par* T *le point où la corde des contacts* AB *rencontre la directrice de la courbe, les bissectrices de l'angle formé par les droites* TN *et* TA *sont parallèles aux bissectrices de l'angle* ATB.