NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. COLLIGNON

Note sur la résolution, au moyen de tableaux graphiques, de certains problèmes de cosmographie et de trigonométrie sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 179-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__179_1>

NOTE SUR LA RÉSOLUTION, AU MOYEN DE TABLEAUX GRAPHIQUES, DE CERTAINS PROBLÈMES DE COSMOGRAPHIE ET DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

PAR M. E. COLLIGNON,

Ingenieur en chef des Ponts et Chaussees.

I.

Proposons-nous de construire un tableau graphique qui fasse connaître, par une simple lecture, les heures du lever et du coucher du Soleil en un point quelconque du globe terrestre et à une époque quelconque de l'année. Les heures cherchées dépendent de la latitude du lieu et de la déclinaison du Soleil à l'époque donnée. Nous résoudrons le problème en faisant abstraction de la dépression de l'horizon sensible, de l'influence de la réfraction des rayons solaires, de la petite variation subie par la déclinaison pendant la journée, et enfin de l'équation du temps.

Soit (*) O le lieu de l'observation; Z le zénith de ce

(*) Le lecteur est prie de faire les figures.

lieu; EON le plan de l'horizon; N le nord vrai; E l'est; S le point où le Soleil se lève; P le pôle boréal du monde.

L'arc PN représente la latitude λ du lieu; l'arc PS, distance du Soleil au pôle, est le complément de la déclinaison D. L'angle ZPS est l'*angle horaire* du lever; nous le représenterons par H. Cet angle est donné, soit par le triangle sphérique ZPS, dans lequel le côté ZS est égal à un quadrant, soit par le triangle PNS, qui est rectangle en N, et où l'angle en P est le supplément de l'angle cherché. On obtient la relation

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang} D = -\cos H,$$

qui fait connaître l'angle horaire; il n'y a plus qu'à convertir les degrés de cet angle en heures, minutes,... à raison de une heure pour 15 degrés. Le résultat, retranché de douze heures, sera l'heure du lever rapportée au temps vrai; l'heure du coucher sera exprimée par l'angle H lui-même, converti en heures.

Dans la formule (1), les variables λ, D doivent recevoir des signes. Nous admettons qu'elles sont positives quand elles se rapportent à l'hémisphère boréal, et négatives quand elles se rapportent à l'hémisphère austral. On remarquera, d'ailleurs, que le changement de λ en $-\lambda$ équivaut au changement de D en $-$D, de sorte qu'on peut prévoir tous les cas possibles en regardant λ comme positif, sauf à faire varier D entre ses deux limites extrêmes, $-\varphi$ et $+\varphi$, φ désignant l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur.

L'équation (1) se résout graphiquement par la construction suivante :

Sur une droite quelconque, prenons une longueur OB égale à une unité arbitrairement choisie. Au point B, faisons l'angle OBA $=\lambda$, et élevons au point O une perpendiculaire OA sur OB jusqu'à la rencontre du côté BA. La longueur OA sera égale à tangλ. Par le point A, menons une droite AC, qui fasse avec OA un angle OAC $=$ D, à droite de OA si D est positif, à gauche si D est négatif. La droite AC coupe en C le côté BO, prolongé s'il est nécessaire, et l'on a

$$\text{OC} = \text{OA} \tang \text{D} = \tang\lambda \tang \text{D}.$$

Pour avoir l'angle H, il suffit donc, puisque OB est l'unité, de décrire du point O comme centre, avec OB pour rayon, une circonférence BB′ qui coupera en E la droite CE élevée au point C perpendiculairement à BO. Joignant OE, on aura en BOE l'angle demandé. En effet, OC est, dans le cercle BEB′, égal à — cos BOE, et, par conséquent, angle BOE $=$ H. Si D était négatif, le point C serait situé entre les points O et B, et l'angle BOE serait aigu; son cosinus changé de signe serait donc encore égal au produit tangλ tang D, devenu négatif par le changement de signe de tang D.

On voit sur-le-champ qu'il est inutile de tracer la droite BA, et que la construction reste identiquement la même si l'on prend la longueur OA égale à tangλ. Elle reste encore la même si l'on déplace le cercle BEB′ d'une quantité quelconque le long de la direction AO, ce qui permettra de faire partir du même point fixe A les droites AO dont les longueurs représentent les latitudes, et les droites AC qui correspondent aux déclinaisons du Soleil. Enfin, en achevant le cercle, on pourra attribuer sa moitié supérieure au lever du Soleil et sa moitié inférieure au coucher, et y marquer les vingt-quatre heures avec leurs subdivisions, de manière à lire l'heure du lever sur une des demi-circonférences, l'heure du coucher sur l'autre. On obtient, en définitive, le tracé suivant :

A, origine fixe des longueurs, AO $=$ tangλ;

MN, droite perpendiculaire à AO, correspondant à une latitude donnée λ;

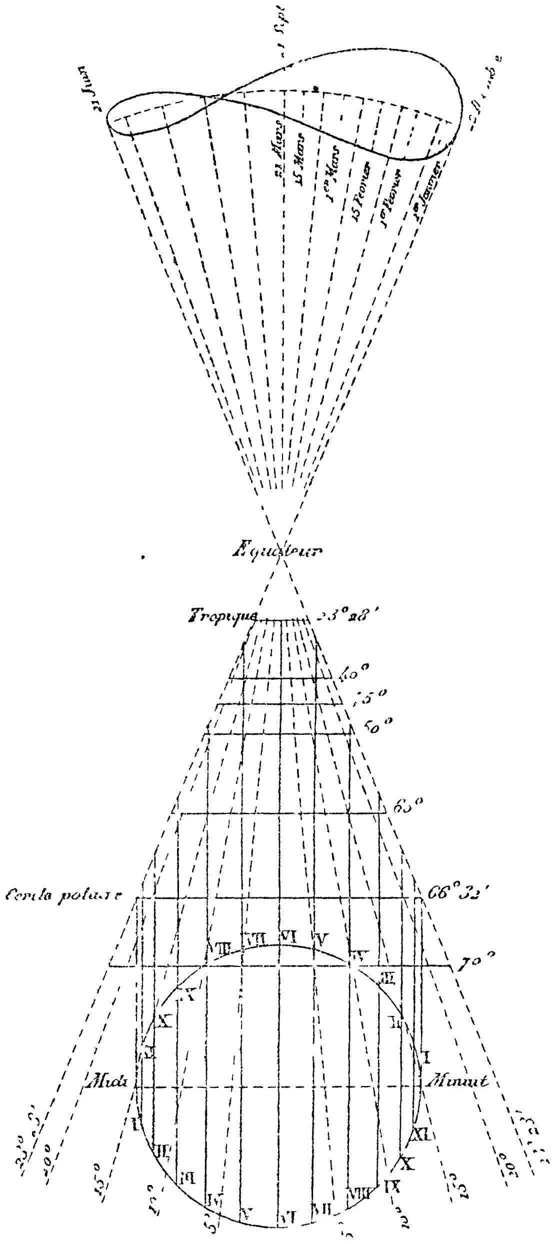
AC, droite issue du point A, et faisant avec OA l'angle D égal à la déclinaison (à droite ou à gauche de AO, suivant que la déclinaison est boréale ou australe);

O′, cercle de rayon égal à l'unité, divisé en vingt-quatre parties égales représentant les vingt-quatre heures; la ligne BB′, *midi-minuit*, est perpendiculaire à la droite AO. Le centre du cercle est situé sur la droite AO prolongée.

La droite CDD′, parallèle à AO, menée par le point C, où se coupent des droites MN et AC qui représentent respectivement la latitude λ et la déclinaison D, rencontre le cercle précédent en deux points E′ et E, qui définissent, l'un l'angle horaire du lever, E′O′B, l'autre l'angle horaire du coucher,, BO′E. Les heures inscrites en E et E′ donnent immédiatement la solution du problème. Cette solution est fournie, comme on le voit, par l'intersection d'un cercle unique tracé une fois pour toutes, avec une droite d'un parallélisme défini, menée par le point commun à deux droites qui dépendent des données λ et D.

On remarquera l'analogie de notre construction avec celle du *Cadran universel des hauteurs,* décrit dans l'*Encyclopédie méthodique*.

Il est aisé de compléter ce Tableau en y faisant paraître un élément que nous avons laissé jusqu'ici de côté, l'*époque de l'année,* qui détermine approximativement la déclinaison du Soleil, et aussi l'*équation du temps,* qui permet de corriger l'heure en la rapportant au midi moyen, au lieu du midi vrai. Du point A, comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons un arc de cerele qui sera coupé en divers points par les


21 Juin
21 Mars
15 Mars
1er Mars
15 Fevrier
1er Fevrier
1er Janvier
Equateur
Tropique
23° 28'
40°
45°
50°
60°
Cercle polaire
66° 32'
70°
Midi
Minuit

rayons correspondant aux déclinaisons. Inscrivons en chacun de ces points le jour de l'année auquel le Soleil a la déclinaison indiquée; puis, portons sur le rayon à partir de l'arc de cercle, dans un sens ou dans l'autre suivant qu'elle est positive ou négative, une quantité proportionnelle à l'équation du temps relative à cette même date, évaluée à une échelle arbitraire. Nous pourrons construire ainsi une courbe continue qui fera connaître à la fois, par les dates inscrites le long du tracé et par les cotes de ses ordonnées successives, l'époque de l'année et l'équation du temps qui correspond à cette époque. Ces résultats ne peuvent être complétement rigoureux, puisque les deux éléments qui y sont donnés varient légèrement d'une année à l'autre.

Les limites du Tableau sont, d'une part, les deux droites menées à droite et à gauche de la ligne moyenne AO, et faisant avec cette droite des angles égaux à l'angle φ de l'équateur et de l'écliptique : elles correspondent aux solstices. En haut, le Tableau se termine au point A, puisque nous excluons les latitudes négatives. Vers le bas, il peut être indéfiniment prolongé, puisque la tangente de 90 degrés est infinie ; nous l'avons arrêté arbitrairement à la latitude de 70 degrés. La latitude du cercle polaire est représentée par une droite dont la portion inscrite dans l'angle des déclinaisons extrêmes est égale au diamètre du cercle des heures. A l'un des solstices le jour n'y dure qu'un instant, à l'autre il dure vingt-quatre heures. Pour les latitudes plus élevées, le Tableau indique clairement que les grandes valeurs absolues de la déclinaison laissent le Soleil au-dessus de l'horizon ou au-dessous pendant les vingt-quatre heures, les points de rencontre E et E' devenant imaginaires. Au pôle, qui correspond à une droite infinie en longueur, en comparaison de laquelle le diamètre du cercle des heures devient négligeable, le

Soleil reste entièrement au-dessus de l'horizon ou entièrement au-dessous, d'un équinoxe à l'autre, époques qui, sur l'épure, correspondent à la droite moyenne AO. Rien n'est plus facile que de déterminer de même, d'après la courbe des époques, les durées du séjour du Soleil au-dessous ou au-dessus de l'horizon, pour un point quelconque de la zone glaciale.

Enfin, ce tableau s'applique seulement aux latitudes positives, c'est-à-dire boréales. On peut s'en servir pour un point de l'hémisphère austral, en changeant à la fois le signe de la latitude et le signe de la déclinaison, ce qui fait connaître les heures rapportées au temps vrai. Mais, pour la correction de ces heures, on aura soin de prendre l'équation du temps qui s'applique à l'*époque vraie,* en observant que la symétrie de la figure par rapport à la ligne moyenne AO ne s'étend pas à la courbe des époques.

Le même Tableau fait connaître aussi les coordonnées géographiques des points du globe pour lesquels le Soleil se lève ou se couche au même instant. Proposons-nous, par exemple, de trouver les points de la Terre pour lesquels le coucher du Soleil a lieu à la même heure que pour Paris, lorsque la déclinaison est de 10 degrés australe.

Soit AC la droite qui correspond à la déclinaison 10 degrés australe, CO l'horizontale qui correspond à la latitude de Paris. L'heure marquée en E sera l'heure du coucher du Soleil à Paris. Au même jour, le Soleil se couche à l'heure E_1 pour la latitude O_1C_1, à l'heure E_2 pour la latitude O_2C_2 (heure des localités), et ces heures correspondent au même instant, s'il y a entre les points où on les observe et Paris des différences de longitude égales aux angles $E_1O'E$, $E_2O'E$. Il suffit donc pour résoudre le problème d'associer aux latitudes rencontrées par la droite AC les longitudes représentées dans le cercle par les angles au centre correspondant aux arcs horaires. Les angles comptés en arrière de O'E correspondent aux longitudes occidentales, les angles comptés dans le sens des heures correspondent aux longitudes à l'est du méridien auquel on rapporte le temps. Le cercle des heures permet donc d'introduire dans le problème la considération des longitudes.

II.

Un abaque analogue, que nous avons construit, fait connaître à vue l'*angle azimutal* NOS, compris entre le nord et le point de l'horizon où le Soleil se lève, angle qu'on appelle parfois l'*amplitude ortive* du Soleil et qui est égal, si l'on néglige la variation diurne de la déclinaison, à l'angle azimutal compris entre le nord et le coucher, c'est-à-dire à l'*amplitude occase*.

Cet angle ω est donné par le triangle rectangle PNS; on a, en effet,

$$\cos PS = \cos PN \cos NS,$$

ou bien

$$\sin D = \cos\lambda \cos\omega. \tag{2}$$

Posons

$$x = \cos\omega, \quad y = \sin D;$$

il viendra

$$y = x\cos\lambda,$$

équation qui représente en coordonnées rectangles une série de droites passant toutes par l'origine et dont les coefficients angulaires sont égaux aux cosinus de la latitude. Ayant tracé ces droites pour différentes valeurs de λ, on les coupera par une série de parallèles à l'axe des x, ayant pour ordonnées le sinus de la déclinaison. Le point d'intersection d'une droite du premier système avec une droite du second aura pour abscisse le cosinus de l'angle ω; et l'on pourra, par conséquent, lire la valeur de cet angle, si l'on a soin de graduer l'axe des abscisses suivant la loi exprimée par l'équation $x = \cos\omega$ et d'y inscrire les valeurs de l'angle ω, et non celles de l'abscisse x. L'axe des y sera gradué suivant la loi $y = \sin D$, en donnant à D des valeurs positives ou négatives, comprises entre ces deux limites extrêmes. Enfin chaque droite passant par l'origine porte une cote qui fait connaître la latitude correspondante.

Le même Tableau graphique, prolongé et complété, peut servir à résoudre à vue tout triangle sphérique rectangle. On obtient ainsi le Tableau n° 3.

Soit ABC un triangle rectangle en A ; soient a l'hypoténuse, b et c les côtés de l'angle droit, B et C les angles opposés. On aura, entre ces divers éléments, les deux équations principales

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

$$\sin b = \sin a \sin B;$$

et si l'on parvient à tracer deux séries de lignes qui correspondent l'une au paramètre c, l'autre au paramètre B, les coordonnées dépendant des arguments a et b, on aura construit un Tableau graphique qui liera ensemble ces quatre éléments, et qui permettra de résoudre à vue le triangle, quelles que soient les données. Nous ferons pour cela, comme tout à l'heure,

$$x = \cos b,$$

$$y = \cos a,$$

et il viendra

$$y = x \cos c,$$

équation de droites passant par l'origine et représentant les lignes c,

$$\sqrt{1 - x^2} = \pm \sin B \sqrt{1 - y^2},$$

ou

$$1 - x^2 = \sin^2 B \,(1 - y^2),$$

équation d'hyperboles qui passent toutes par les points du plan $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, et qui correspondent chacune à une valeur de l'angle B. Si, dans cette dernière équation, on fait $y = 0$, il vient

$$x^2 = 1 - \sin^2 B = \cos^2 B.$$

Donc $x = \pm \cos B$. Chaque hyperbole coupe donc l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est le cosinus de l'angle cherché. Or l'axe des x est déjà gradué suivant la loi $x = \cos b$. L'arc inscrit en chaque point de l'axe représente donc un angle, et, par conséquent, le point d'intersection de chaque hyperbole avec l'axe des abscisses donne l'angle B qui définit la courbe.

Mais on pourrait aussi se passer de ces courbes, en observant que l'équation

$$\sin b = \sin a \sin B$$

équivaut à celle-ci

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right),$$

de sorte que les arcs $\frac{\pi}{2} - b$, $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} - B$ forment un triangle rectangle dont $\frac{\pi}{2} - b$ est l'hypoténuse. La relation entre les trois éléments a, b, B est donc donnée par le même diagramme que celle qui lie les éléments a, b, c, moyennant qu'on remplace respectivement a, b, c par

$$\frac{\pi}{2} - b, \frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} - B.$$

On pourrait construire de même une série de courbes donnant les valeurs de l'angle C, compris entre les côtés a et c.

En attribuant à cet angle différentes valeurs successives, on aurait entre x et y une équation du quatrième degré; mais ce tracé surchargerait trop l'épure. Après avoir considéré dans le triangle les côtés et les angles pris dans l'ordre a, B, c, b, C, on peut aussi bien les prendre dans l'ordre inverse a, C, b, c, B, et permuter B en C, C en B, b en c, c en b. Alors $\cos x$ devient l'abscisse, $\cos b$ le coefficient angulaire des droites issues de l'origine, $\cos a$ reste l'ordonnée, et les hyperboles, qui tout à l'heure correspondaient aux angles B, correspondent maintenant aux angles C. Il n'y aura donc de difficulté que pour le problème où l'on donnerait les deux angles B et C, qui seraient représentés tous les deux par des courbes du même système. Le Tableau servira encore à résoudre le triangle, mais à l'aide d'un tâtonnement.

Soient NB, NC les hyperboles qui correspondent aux angles donnés C et B. Si l'on mène arbitrairement une droite horizontale, correspondant à une valeur de l'hypoténuse a, cette droite coupe les deux hyperboles en des points P et Q. La droite OP prolongée coupe MN en un point L; la droite QR, abaissée perpendiculairement sur OM, coupe l'axe des abscisses en un point R. Or les deux segments OR, ML représentent tous les deux le cosinus du même côté; ils doivent donc être égaux, et la droite (a) doit être telle qu'on ait ML = OR. Les droites OL, QR étant tracées en grand nombre sur le Tableau, il sera facile de déterminer par quelques essais la position de la droite (a), qui assure cette égalité des deux segments.

Remarquons, en finissant, que le triangle plan OMN, partagé par les lignes issues du point O, peut être regardé comme la carte, dans un système particulier de tracé, d'un triangle sphérique trirectangle *omn*. Le point O correspond au pôle o, pris en l'un des sommets.

Le côté MN est l'équateur, et les rayons issus du point O sont les méridiens. Les droites perpendiculaires à OM représentent les parallèles LL'. Si l'on désigne par λ la latitude *pl* d'un point *p*, et par L sa longitude, comptée à partir du côté *om* pris pour premier méridien, on aura, dans le triangle *mpl*, rectangle en *l*,

$$\text{l'hypoténuse } mp = a, \quad ml = c = \mathrm{L}, \quad pl = b = \lambda,$$

et la relation

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Les formules de transformation seront

$$x = \cos b = \cos\lambda,$$

$$y = \cos a = \cos\lambda \cos \mathrm{L}.$$

L'hypoténuse a donne la distance sphérique du point p au point m de l'équateur, et les angles B, donnés par les hyperboles, sont les angles *pml* formés par cette distance sphérique avec l'équateur. On reconnaît les deux éléments nécessaires au *tracé central d'égale superficie*, qui a pour centre un point m pris sur l'équateur.

Le même Tableau permet aussi de résoudre à vue la question qui consiste à trouver la distance de deux points sur la sphère, connaissant les latitudes et les longitudes de ces deux points.

Soient λ, λ' les latitudes données, L la différence des longitudes données, et Δ la distance cherchée ; on aura

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \sin\lambda \sin\lambda' + \cos\lambda \cos\lambda' \cos \mathrm{L}\\ &= \sin\lambda(\sin\lambda' + \cot\lambda \cos\lambda' \cos \mathrm{L}).\end{aligned}$$

Appelons φ un arc auxiliaire donné par la formule

$$\tang\varphi = \cot\lambda \cos \mathrm{L},$$

il viendra

$$\cos\Delta = \sin\lambda\left(\sin\lambda' + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\lambda'\right) = \frac{\sin\lambda \sin(\lambda' + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Cela posé, considérons trois triangles rectangles, savoir :

1° Un triangle ayant pour côtés de l'angle droit les arcs φ et $90° - L$; l'angle opposé au côté φ sera égal à $90° - \lambda$, car on a

$$\tang \varphi = \sin(90° - L) \tang(90° - \lambda),$$

en vertu de la relation qui définit l'arc auxiliaire. Ce premier triangle, où l'on connaît le côté $90° - L$ et l'angle adjacent $90° - \lambda$, fait donc connaître le côté φ, que l'on trouve sur le Tableau graphique.

2° Un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit $90° - \lambda$ et $90° - \lambda' - \varphi$. Si l'on appelle x son hypoténuse, on aura

$$\cos x = \cos(90° - \lambda)\cos(90° - \lambda' - \varphi) = \sin\lambda \sin(\lambda' + \varphi).$$

Le côté x sera donc encore facile à trouver sur le Tableau.

3° Imaginons un troisième triangle rectangle ayant pour hypoténuse x, et φ pour l'un des côtés de l'angle droit. L'autre côté sera égal à la distance cherchée Δ, car son cosinus sera égal à $\frac{\cos x}{\cos \varphi}$ ou à

$$\frac{\sin\lambda \sin(\lambda' + \varphi)}{\cos\varphi} = \cos\Delta.$$

Le Tableau résout donc le problème, en introduisant deux auxiliaires, φ et x. Ces opérations successives sont résumées dans le Tableau symbolique suivant :

Quantités données.		Quantités cherchées.
$c = 90° - L$	$B = 90° - \lambda$	$b = \varphi$
$b = 90° - \lambda$	$c = 90° - \lambda' - \varphi$	$a = x$
$a = x$	$b = \varphi$	$c = \Delta$