NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Solution de la question de mécanique élémentaire proposée au concours d'agrégation en 1876

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 115-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__115_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1876;

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une circonférence O *située dans un plan vertical, et, sur la verticale du centre* O, *au-dessus de ce point et en dehors du cercle, on prend un point* C *que l'on considère comme une poulie infiniment petite.*

Sur une poulie passe un fil ACB; *à l'extrémité* B *est suspendu un poids* Q, *à l'autre extrémité* A *est fixé un* *anneau qui supporte un poids* P *et qui est assujetti à glisser sans frottement le long de la circonférence* O.

Déterminer les positions d'équilibre du système et indiquer pour chacune d'elles si l'équilibre est stable ou instable. (*On néglige le poids du fil et celui de l'anneau, ainsi que les dimensions de la poulie et celles de l'anneau.*)

Posons

$$OA = r, \quad OC = h, \quad \widehat{AOC} = \alpha, \quad \widehat{ACO} = \beta.$$

Les composantes tangentielles du poids P et de la tension Q du fil AC sont $P\sin\alpha$ et $Q\sin(\alpha+\beta)$, quel que soit l'angle α. La condition d'équilibre est donc

$$(1) \qquad P\sin\alpha = Q\sin(\alpha+\beta).$$

Le triangle OAC donne

$$\frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{h}$$

ou

$$(2) \qquad h\sin\beta = r\sin(\alpha+\beta).$$

En divisant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{P\sin\alpha}{h\sin\beta} = \frac{Q}{r}, \quad \text{d'où} \quad \sin\beta = \frac{Pr}{Qh}\sin\alpha.$$

D'autre part, l'équation (2) donne

$$\tan\beta = \frac{r\sin\alpha}{h - r\cos\alpha}, \quad \text{d'où} \quad \sin\beta = \frac{r\sin\alpha}{\sqrt{h^2 + r^2 - 2rh\cos\alpha}}.$$

En égalant ces deux valeurs de $\sin\beta$, on a

$$(3) \qquad r\sin\alpha\left(P\sqrt{h^2+r^2-2rh\cos\alpha} - Qh\right) = 0.$$

La solution $\sin\alpha = 0$, d'où $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, donne comme positions d'équilibre les deux extrémités D et D' du diamètre vertical.

En égalant à zéro le facteur entre parenthèses, on a

$$\cos\alpha = \frac{P^2(h^2 + r^2) - Q^2h^2}{2P^2rh},$$

ce qui donne une troisième position d'équilibre pourvu que le second membre soit compris entre $+1$ et -1, ou que l'on ait

$$\frac{Qh}{h+r} < P < \frac{Qh}{h-r}.$$

L'angle α sera d'ailleurs aigu ou obtus suivant que P sera plus grand ou plus petit que $\frac{Qh}{\sqrt{h^2+r^2}}$.

Au point D, $\alpha = 0$, l'équilibre sera stable ou instable suivant qu'on aura, pour de très-petites valeurs de α,

$$Q\sin(\alpha + \beta) - P\sin\alpha \gtrless 0,$$

ou, en ne négligeant que des quantités infiniment petites par rapport à celles que l'on conserve,

$$Q(\alpha + \beta) - P\alpha \gtrless 0, \quad Q\beta = \frac{Pr}{h}\alpha.$$

La condition de stabilité de l'équilibre est donc

$$\left[Q - \frac{P(h-r)}{h}\right]\alpha > 0, \quad \text{ou} \quad P < \frac{Qh}{h-r}.$$

Au point D', $\alpha = \pi$, l'équilibre sera stable ou instable suivant que, pour de très-petites valeurs de $\alpha' = \pi - \alpha$, on aura

$$P\sin\alpha - Q\sin(\alpha + \beta) \gtrless 0$$

ou

$$P\alpha' - Q(\alpha' - \beta) \gtrless 0, \quad \beta = \frac{Pr}{h}\alpha'.$$

La condition de stabilité est donc

$$P\frac{h+r}{h} - Q > 0 \quad \text{ou} \quad P > \frac{Qh}{h+r}.$$

Si donc P est compris entre $\frac{Qh}{h-r}$ et $\frac{Qh}{h+r}$, l'équilibre sera stable aux points D et D', et il y aura entre ces deux points une troisième position d'équilibre, nécessairement instable. En effet, si l'on écarte l'anneau de l'un des points D, D', il tend à y revenir jusqu'à ce que l'on atteigne la position d'équilibre intermédiaire : donc, dans cette position, l'équilibre est instable.

Si l'on a $P \geq \frac{Qh}{h-r}$, l'équilibre est instable en D et stable en D'.

Si $P \leq \frac{Qh}{h+r}$, l'équilibre est stable en D, instable en D'.

Dans ces deux cas, il n'y a pas d'autre position d'équilibre.

Lorsque P tend vers l'une des limites $\frac{Qh}{h-r}$, $\frac{Qh}{h+r}$, la position d'équilibre A tend vers la limite D ou D', où l'équilibre devient alors instable.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey et Tourrettes.