NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

SONDAT

Concours d'admission à l'École spéciale militaire (année 1877). 3e question

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 207-209

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__207_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (ANNÉE 1877).

3e QUESTION

(voir 2e série, t. XVI, p. 370);

PAR M. SONDAT.

On donne un demi-cercle construit sur AB *comme diamètre, et l'on mène la tangente* BT *au point* B. *Cela posé, on demande de mener par le point* A *la*

(*) Le radical $+\sqrt{2a^2+2b\sqrt{2a^2-b^2}} = b+\sqrt{2a^2-b^2}$; donc

$$\frac{b-\sqrt{2a^2-b^2}+\sqrt{2a^2+2b\sqrt{2a^2-b^2}}}{2} = \frac{2b}{2} = b.$$

(**) La substitution de $\frac{1}{2}\left(b+\sqrt{2a^2-b^2}\right)$ à x donne

$$x'+\sqrt{a^2-x'^2} = \frac{b+\sqrt{2a^2-b^2}+\sqrt{2a^2-2b\sqrt{2a^2-b^2}}}{2}.$$

Pour $b>a$, on a $+\sqrt{2a^2-2b\sqrt{2a^2-b^2}} = b-\sqrt{2a^2-b^2}$, et par suite

$$x'+\sqrt{a^2-x'^2} = \frac{2b}{2} = b.$$

Si $b=a$: $\sqrt{2a^2-b^2}=b$, $\sqrt{2a^2-2b\sqrt{2a^2-b^2}}=0$, $x'+\sqrt{a^2-x'^2}=b$;

sécante AMN (M *et* N *étant les points où elle coupe la demi-circonférence et la tangente* BT), *telle que si l'on fait tourner la figure autour de* AB, *le volume engendré par la portion de cercle* AMB *soit équivalent au volume engendré par la surface* MNB *qui est limitée par les droites* MN, NB *et l'arc de cercle* MB.

Je mène la perpendiculaire MC au diamètre AB, et j'appelle R le rayon du cercle ; v et v' les volumes engendrés par le triangle ABN et la portion de cercle ABM.

On doit avoir

$$v = 2v';$$

et, comme $v = \frac{2}{3}\pi R.BN^2$ et $v' = \frac{2}{3}\pi R.MC^2 + \frac{1}{3}\pi R.BC^2$, en considérant ce dernier volume comme engendré par le triangle AMB et le segment MB, il vient

$$BN^2 = 2MC^2 + BC^2,$$

ou, en remplaçant $MC^2 + BC^2$ par MB^2,

$$BN^2 - MB^2 = MC^2$$

ou encore

$$MN^2 = MC^2.$$

Il en résulte que MN = MC, ce qui entraîne l'égalité des triangles AMC et BMN, et par suite des côtés AC et MB.

---

mais, lorsqu'on a $b < a$, il en résulte

$$+\sqrt{2a^2 - 2b\sqrt{2a^2 - b^2}} = \sqrt{2a^2 - b^2} - b;$$

d'où

$$x' + \sqrt{a^2 - x'^2} = \sqrt{2a^2 - b^2} > b.$$

La racine x' satisfait alors à l'équation $x - \sqrt{a^2 - x^2} = b$.

En désignant par x chacun de ces deux côtés, le triangle AMB donne

$$\mathrm{AM}^2 = 2\mathrm{R}x = 4\mathrm{R}^2 - x^2\,;$$

d'où l'équation

$$x^2 + 2\mathrm{R}x - 4\mathrm{R}^2 = 0,$$

et, en rejetant la solution négative dont la valeur absolue excède le diamètre,

$$x = \mathrm{R}(\sqrt{5} - 1)\ (^*).$$

Note. — La même question a été résolue par M. B. Robaglia.