NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 119-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__119_0>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

RELATIONS DIFFÉRENTIELLES ENTRE LES FONCTIONS AUXILIAIRES.

Posons

$$y = \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)};$$

on aura

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{H}'(x)\,\Theta(x) - \Theta'(x)\,\mathrm{H}(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Or, en différentiant les formules (5), on a

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{H}'(x + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= -\,\mathrm{H}'(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})} \\ &\quad + \mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}\,\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}, \\ \Theta'(x + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= -\,\Theta'(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})} \\ &\quad + \Theta(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}\,\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}. \end{aligned} \right.$$

Or les deux fonctions $\mathrm{H}(x)$ et $\Theta(x)$ possèdent la période $4\mathrm{K}$; il en est donc de même de $\mathrm{H}'(x)\,\Theta(x) - \Theta'(x)\,\mathrm{H}(x)$, et, quand on y change x en $x + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$, en vertu de (2), cette fonction devient

$$[\Theta(x)\,\mathrm{H}'(x) - \mathrm{H}(x)\,\Theta'(x)]\,e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})};$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 78, 211, 361, 385, 433, 481.

en d'autres termes, elle s'est trouvée multipliée par

$$e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})} = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}2(x+K'\sqrt{-1})}.$$

Or les fonctions $\Theta(x)H(x)$ et $\Theta_1(x)H_1(x)$ sont dans ce cas; on doit donc poser

$$(3)\quad H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x) = A\Theta(x)H(x) + B\Theta_1(x)H_1(x),$$

ou, en divisant par Θ^2 et en tenant compte de (1),

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{H(x)}{\Theta(x)} + B\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}\frac{H_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Mais, si, dans (3), on change x en $-x$, on a

$$H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x) = -A\Theta(x)H(x) + B\Theta_1(x)H_1(x),$$

et, en comparant cette formule avec (3), on a

$$A = 0;$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = B\frac{\Theta_1}{\Theta}\frac{H_1}{\Theta}.$$

Si, dans (3), on fait $x=0$, on a

$$H'(0)\Theta(0) = B\Theta_1(0)H_1(0).$$

Tirant B de là, la formule précédente donne

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{H'(0)\Theta(0)}{\Theta_1(0)H_1(0)}\frac{\Theta_1(x)H_1(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Entre cette formule et les formules (1) et (2) du paragraphe précédent, éliminons $\Theta_1(x)$ et $H_1(x)$; nous aurons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{H'^2(0)}{\Theta^2(0)}\left[1 - \frac{\Theta_1^2(0)}{H_1^2(0)}y^2\right]\left[1 - \frac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)}y^2\right].$$

Cette équation serait identique à celle qui nous a servi primitivement à définir le sinus de l'amplitude de x, si l'on supposait

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{sn} x = \frac{\Theta_1(o)}{H_1(o)}y = \frac{\Theta_1(o)}{H_1(o)}\frac{H(x)}{\Theta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(x)}{\Theta(x)},\\ &\frac{\Theta_1(o)}{H_1(o)}\frac{H'(o)}{\Theta'(o)} = 1,\\ &\frac{H_1^2(o)}{\Theta_1^2(o)} = k, \end{aligned}\right.$$

et l'on aurait

$$\left(\frac{d\operatorname{sn} x}{dx}\right)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 x)(1 - k^2\operatorname{sn}^2 x).$$

On a donc bien

$$\operatorname{sn} x = \frac{H(x)}{\Theta(x)}\frac{\Theta_1(o)}{H_1(o)},$$

et il est nettement établi que la fonction $\operatorname{sn} x$ est monodrome, puisqu'on peut la former de toutes pièces en la considérant comme le quotient de deux fonctions monodromes.

Maintenant reprenons les formules (1) et (2) du paragraphe précédent; on peut les écrire, en divisant par $\Theta^2(x)$,

$$1 = \frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}\frac{\Theta^2(o)}{H_1^2(o)} + \frac{H_1^2(x)}{\Theta^2(x)}\frac{\Theta^2(o)}{H_1^2(o)},$$

$$1 = \frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}\frac{H_1^2(o)}{\Theta_1^2(o)} + \frac{\Theta_1^2(x)}{\Theta^2(x)}\frac{\Theta^2(o)}{\Theta_1^2(o)}.$$

La première, en vertu de (5), sera satisfaite en posant

$$\frac{H_1(x)}{\Theta(x)}\frac{\Theta(o)}{H_1(o)} = \cos\operatorname{am} x = \operatorname{cn} x,$$

et la dernière donnera

$$1 = k^2\operatorname{sn}^2 x + \frac{\Theta_1^2(x)}{\Theta^2(x)}\frac{\Theta^2(o)}{\Theta_1^2(o)},$$

ou bien

$$\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}\,\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \sqrt{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 x} = \mathrm{dn}^2 x.$$

Elle donnera aussi, pour $x = \mathrm{K}$,

$$1 = \frac{\mathrm{H}^2(\mathrm{K})}{\Theta^2(\mathrm{K})}\,\frac{\mathrm{H}_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} + \frac{\Theta_1^2(\mathrm{K})}{\Theta^2(\mathrm{K})}\,\frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)},$$

ou bien

$$1 = \frac{\mathrm{H}_1^4(0)}{\Theta_1^4(0)} + \frac{\Theta^4(0)}{\Theta_1^4(0)}.$$

Le premier terme du second membre est k^2, le second est donc la quantité désignée plus haut par k'^2 ; k' est ce que nous avons appelé le *module complémentaire*. On a donc le tableau suivant :

TABLEAU N° 4.

$$[10]\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{sn}\,x = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},\\
&\mathrm{cn}\,x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)},\\
&\mathrm{dn}\,x = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},\\
&k = \frac{\mathrm{H}_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} = \frac{\Theta^2(0)}{\mathrm{H}'^2(0)},\qquad k' = \frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)},\qquad \frac{k}{k'} = \frac{\mathrm{H}_1^2(0)}{\Theta^2(0)}
\end{aligned}\right.$$

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

$$[11]\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},\\
&\mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}},
\end{aligned}\right.$$

$$[12]\quad\left\{\begin{array}{lll}
\operatorname{sn} 0 = 0, & \operatorname{cn} 0 = 1, & \operatorname{dn} 0 = 1, \\
\operatorname{sn} K = 1, & \operatorname{cn} K = 0, & \operatorname{dn} K = k', \\
\operatorname{sn} 2K = 0, & \operatorname{cn} 2K = 1, & \operatorname{dn} 2K = 1, \\
\operatorname{sn} K'\sqrt{-1} = \infty, & \operatorname{cn} K'\sqrt{-1} = \infty, & \operatorname{dn} K'\sqrt{-1} = \infty, \\
\operatorname{sn}(2K + K'\sqrt{-1}) = \infty, & \operatorname{cn}(2K + K'\sqrt{-1}) = \infty, & \operatorname{dn}(2K + K'\sqrt{-1}) = \infty, \\
\operatorname{sn}(K + K'\sqrt{-1}) = \dfrac{1}{k}, & \operatorname{cn}(K + K'\sqrt{-1}) = -\dfrac{k'\sqrt{-1}}{k}, & \operatorname{dn}(K + K'\sqrt{-1}) = 0,
\end{array}\right.$$

$$[13]\quad\left\{\begin{array}{lll}
\operatorname{sn}(-x) = -\operatorname{sn} x, & \operatorname{cn}(-x) = \operatorname{cn} x, & \operatorname{dn}(-x) = \operatorname{dn} x, \\
\operatorname{sn}(2K - x) = \operatorname{sn} x, & \operatorname{cn}(2K - x) = \operatorname{cn} x, & \operatorname{dn}(2K - x) = \operatorname{dn} x, \\
\operatorname{sn}(2K + x) = -\operatorname{sn} x, & \operatorname{cn}(2K + x) = \operatorname{cn} x, & \operatorname{dn}(2K + x) = \operatorname{dn} x, \\
\operatorname{sn}(K - x) = \dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{cn}(K - x) = k'\dfrac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{dn}(K - x) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} x}, \\
\operatorname{sn}(K + x) = \dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{cn}(K + x) = -k'\dfrac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{dn}(K + x) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} x}, \\
\operatorname{sn}(K'\sqrt{-1} + x) = \dfrac{1}{k \operatorname{sn} x}, & \operatorname{cn}(K'\sqrt{-1} + x) = -\sqrt{-1}\,\dfrac{\operatorname{dn} x}{k \operatorname{sn} x}, & \operatorname{dn}(K'\sqrt{-1} + x) = -\sqrt{-1}\,\dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x}, \\
\operatorname{sn}(2K'\sqrt{-1} + x) = \operatorname{sn} x, & \operatorname{cn}(2K'\sqrt{-1} + x) = -\operatorname{cn} x, & \operatorname{dn}(2K'\sqrt{-1} + x) = -\operatorname{dn} x.
\end{array}\right.$$

[14]

Fonctions.	Periodes.	Zeros.	Infinis.
$\operatorname{sn} x$	$4K,\ 2K'\sqrt{-1},$	$0,\ 2K,$	$K'\sqrt{-1},\ 2K + K'\sqrt{-1},$
$\operatorname{cn} x$	$2K,\ 2K + 2K'\sqrt{-1},$	$K,\ -K,$	$K'\sqrt{-1},\ 2K + K'\sqrt{-1},$
$\operatorname{dn} x$.	$2K,\ 2K'\sqrt{-1},$	$\pm K + K'\sqrt{-1},$	$K'\sqrt{-1},\ 2K + K'\sqrt{-1}.$

RELATIONS ENTRE $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ ET $\operatorname{dn} x$.

A la fonction $\operatorname{sn} x$, définie par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \tag{1}$$

nous avons adjoint les fonctions

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{cn} x &= v = \sqrt{1-u^2}, \\ \operatorname{dn} x &= w = \sqrt{1-k^2u^2}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

La formule (1) pourra alors s'écrire

$$\frac{du}{dx} = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x = vw.$$

Des formules (2) on déduira

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} = -uw,$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{k^2u}{\sqrt{1-k^2u^2}}\frac{du}{dx} = -k^2vu.$$

Ainsi on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d \operatorname{sn} x}{dx} &= \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x, \\ \frac{d \operatorname{cn} x}{dx} &= -\operatorname{dn} x \operatorname{sn} x, \\ \frac{d \operatorname{dn} x}{dx} &= -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Maintenant, si l'on observe que

$$u = \sqrt{1-v^2} = \frac{1}{k}\sqrt{1-w^2}, \quad v = \frac{\sqrt{w^2-k'^2}}{k}; \quad w = \sqrt{k'^2+k^2v^2},$$

les formules (3) pourront s'écrire

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

$$\frac{dv}{dx} = -\sqrt{(1-v^2)(k'^2+k^2v^2)},$$

$$\frac{dw}{dx} = -k\sqrt{(w^2-k'^2)(1-w^2)}.$$

Rien n'est plus simple, en partant des formules (3), que de former les équations auxquelles satisferaient tang am x, cot am x, ... On formera ainsi le tableau suivant :

TABLEAU N° 5.

$$[15]\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\,\mathrm{sn}\,x}{dx} &= \mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x,\\ \frac{d\,\mathrm{cn}\,x}{dx} &= -\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{sn}\,x,\\ \frac{d\,\mathrm{dn}\,x}{dx} &= -k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x.\end{aligned}\right.$$

$$[16]\quad \begin{array}{ll} \text{Fonctions.} & \text{Leur équation différentielle.}\\ u = \mathrm{sn}\,x, & \dfrac{du}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},\\ u = \mathrm{cn}\,x, & \dfrac{du}{dx} = -k'\sqrt{(1-u^2)\left(1+\dfrac{k^2}{k'^2}u^2\right)},\\ u = \mathrm{dn}\,x, & \dfrac{du}{dx} = -\sqrt{(1-u^2)(u^2-k'^2)},\\ u = \mathrm{tang\,am}\,x, & \dfrac{du}{dx} = \sqrt{(1+u^2)(1+k'^2u^2)},\\ u = \mathrm{cot\,am}\,x, & \dfrac{du}{dx} = -\sqrt{(1+u^2)(k'^2+u^2)},\\ u = \mathrm{séc\,am}\,x, & \dfrac{du}{dx} = -k'\sqrt{(u^2-1)\left(u^2-\dfrac{k^2}{k'^2}\right)},\\ u = \mathrm{coséc\,am}\,x, & \dfrac{du}{dx} = \sqrt{(u^2-1)(u^2-k^2)},\\ u = \dfrac{1}{\mathrm{dn}\,x}, & \dfrac{du}{dx} = \sqrt{(u^2-1)(1-k'^2u^2)}.\end{array}$$

Ce dernier tableau est utile pour la réduction de l'intégrale

$$\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+m)(u^2+n)}}$$

aux fonctions elliptiques.

FORMULES D'ADDITION.

Considérons maintenant le produit

$$\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x-a) = \theta(x);$$

on a (tableau n° 1)

$$\theta(x+2\mathrm{K}) = \theta(x),$$

$$\theta(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = \theta(x)\,e^{-2\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}.$$

Les fonctions H^2 et Θ^2 satisfont à la même équation; donc

$$\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x-a) = \mathrm{A}\mathrm{H}^2(x) + \mathrm{B}\Theta^2(x).$$

Pour déterminer A et B, on fera $x=0$; on aura alors

$$-\mathrm{H}^2(a) = \mathrm{B}\Theta^2(0).$$

On fera ensuite $x = \mathrm{K}'\sqrt{-1}$; on aura alors

$$\mathrm{H}(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+a)\,\mathrm{H}(\mathrm{K}'\sqrt{-1}-a) = \mathrm{A}\mathrm{H}^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1})$$

ou

$$-\Theta(a)\,\Theta(-a) = -\mathrm{A}\,\Theta^2(0).$$

On a donc

$$\mathrm{B} = -\frac{\mathrm{H}^2(a)}{\Theta^2(0)}, \quad \mathrm{A} = \frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)},$$

et, par suite,

$$\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x-a) = \frac{\Theta^2(a)\,\mathrm{H}^2(x) - \mathrm{H}^2(a)\,\Theta^2(x)}{\Theta^2(0)}.$$

On obtient de la même façon une foule d'autres formules, que nous résumons dans le tableau ci-après.

TABLEAU N° 6.

$$[17]\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{H}(x-a)\,\mathrm{H}(x+a)=\frac{\Theta^2(a)\,\mathrm{H}^2(x)-\mathrm{H}^2(a)\,\Theta^2(x)}{\Theta^2(0)},\\
&\mathrm{H}(x-a)\,\Theta(x+a)\\
&\quad=\frac{\mathrm{H}_1(a)\,\Theta_1(a)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)}\,\mathrm{H}(x)\,\Theta(x)-\frac{\mathrm{H}(a)\,\Theta(a)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1(0)}\,\mathrm{H}_1(x)\,\Theta_1(x),\\
&\mathrm{H}(x-a)\,\mathrm{H}_1(x+a)\\
&\quad=\frac{\Theta_1(a)\,\Theta(a)}{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}\,\mathrm{H}(x)\,\mathrm{H}_1(x)-\frac{\mathrm{H}(a)\,\Theta(a)}{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}\,\Theta(x)\,\Theta_1(x),\\
&\mathrm{H}(x-a)\,\Theta_1(x+a)\\
&\quad=\frac{\mathrm{H}_1(a)\,\Theta(a)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)}\,\mathrm{H}(x)\,\Theta_1(x)-\frac{\mathrm{H}(a)\,\Theta_1(a)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)}\,\Theta(x)\,\mathrm{H}_1(x);
\end{aligned}\right.$$

$$[18]\quad\left\{\begin{aligned}
&\Theta(x-a)\,\Theta(x+a)=\frac{\Theta^2(a)\,\Theta^2(x)-\mathrm{H}^2(a)\,\mathrm{H}^2(x)}{\Theta^2(0)},\\
&\Theta(x-a)\,\mathrm{H}(x+a)\\
&\quad=\frac{\mathrm{H}_1(a)\,\Theta_1(a)\,\mathrm{H}(x)\,\Theta(x)+\mathrm{H}(a)\,\Theta(a)\,\mathrm{H}_1(x)\,\Theta_1(x)}{\Theta_1(0)\,\mathrm{H}_1(0)},\\
&\Theta(x-a)\,\mathrm{H}_1(x+a)\\
&\quad=\frac{\Theta(a)\,\Theta_1(a)\,\mathrm{H}(x)\,\mathrm{H}_1(x)-\mathrm{H}(a)\,\Theta(a)\,\Theta(x)\,\Theta_1(x)}{\Theta(0)\,\Theta_1(0)},\\
&\Theta(x-a)\,\Theta_1(x+a)\\
&\quad=\frac{\mathrm{H}_1(a)\,\Theta(a)\,\mathrm{H}(x)\,\Theta_1(x)-\mathrm{H}(a)\,\Theta_1(a)\,\Theta(x)\,\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(0)}.
\end{aligned}\right.$$

En combinant ces formules par voie de division, et en ayant égard aux formules du tableau n° 4, on trouve, par exemple, en divisant la première [17] par la seconde [17],

$$\mathrm{sn}(x+a)=\frac{\mathrm{sn}^2x-\mathrm{sn}^2a}{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x},$$

et, en multipliant haut et bas par

$$\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

$$\operatorname{sn}(x+a) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x};$$

c'est par ce moyen que l'on formera le tableau suivant :

TABLEAU N° 7.

$$[19] \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b \pm \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{cn}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \mp \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{dn}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \mp k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Pour $a = b$:

$$[20] \quad \begin{cases} \operatorname{sn} 2a = \dfrac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a}, \\ \operatorname{cn} 2a = \dfrac{\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a}, \\ \operatorname{dn} 2a = \dfrac{\operatorname{dn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a}. \end{cases}$$

$$[21] \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b) + \operatorname{sn}(a-b) = G \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b, \\ \operatorname{sn}(a+b) - \operatorname{sn}(a-b) = G \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a, \\ \operatorname{cn}(a+b) + \operatorname{cn}(a-b) = G \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b, \\ \operatorname{cn}(a+b) - \operatorname{cn}(a-b) = -G \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b, \\ \operatorname{dn}(a+b) + \operatorname{dn}(a-b) = G \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b, \\ \operatorname{dn}(a+b) - \operatorname{dn}(a-b) = -G k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b. \end{cases}$$

On a posé

$$G = \frac{2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}.$$

Les formules d'addition [19] sont les premières que l'on ait trouvées sur les fonctions directes. Elles sont analogues aux formules fondamentales de la Trigonométrie; mais ce n'est pas comme nous venons de le montrer qu'elles ont été trouvées.

C'est en intégrant l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0,$$

que l'on est arrivé à la découverte des formules d'addition. La méthode la plus simple qui ait été donnée pour l'intégration de cette formule est due à Lagrange. D'autres méthodes, plus simples en apparence, ont l'inconvénient de s'appuyer sur des artifices qui supposent évidemment que l'on connaît d'avance l'intégrale.

(*A suivre.*)