

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 281-286

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__281_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1062

(voir 2^e série, t. XI, p. 96.);

PAR M. ESCARY.

Démontrer l'identité

$$\begin{aligned}
 & [1 - 2(a + b + c + \dots)x + (a + b + c + \dots)(aA^2 + bB^2 + cC^2 + \dots)]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sum \sum \sum \dots \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{\alpha! \beta! \gamma! \dots 2^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}} \\
 & \times \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma} (x^2 - A^2)^\alpha (x^2 - B^2)^\beta (x^2 - C^2)^\gamma \dots}{d.r^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}},
 \end{aligned}$$

(*) Cet instrument, nomme *alidade autoréductrice*, a pour objet de donner, par une simple lecture, la distance de deux points visibles ainsi que leur différence de niveau.

les sommations s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de α, β, γ , et $\alpha!$ étant supposé devenir égal à 1 quand $\alpha = 0$. (F. DIDON.)

Si l'on considère l'équation du second degré

$$u = x + \frac{a}{2}(u^2 - A^2) + \frac{b}{2}(u^2 - B^2) + \frac{c}{2}(u^2 - C^2) + \dots,$$

dont les racines sont

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2(a+b+c+\dots)x + (a+b+c+\dots)(aA^2 + bB^2 + cC^2 + \dots)}}{a+b+c+\dots},$$

on voit que le développement, par la formule de Lagrange, de la plus petite de ces racines, fournit la démonstration de l'identité qu'il s'agit d'établir; car on a successivement

$$\begin{aligned} & [1 - 2(a+b+c+\dots)x + (a+b+c+\dots)(aA^2 + bB^2 + cC^2 + \dots)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{n-\infty} \frac{1}{n!} d^n \left[\frac{a}{2}(x^2 - A^2) + \frac{b}{2}(x^2 - B^2) + \frac{c}{2}(x^2 - C^2) + \dots \right]^n \\ &= \sum \sum \sum \dots \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{\alpha! \beta! \gamma! \dots 2^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}} \\ & \quad \times \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\dots} (x^2 - A^2)^\alpha (x^2 - B^2)^\beta (x^2 - C^2)^\gamma \dots}{dx^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}}, \end{aligned}$$

en ayant égard à la valeur du développement d'une puissance entière d'un polynôme et observant que, pour $b = 0, c = 0, \dots$ et $A^2 = 1$, on doit retomber sur les fonctions X_n de Legendre, ce qui exige que les $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ soient les mêmes comme indices de différentiation et comme exposants.

Question 1222

(voir 2^e série, t. XV, p. 141.);

PAR M. ARMAND BERTRAND,

Propriétaire à Azillanet (Hérault).

On donne sur un plan un point A et un cercle de rayon variable, mais dont le centre est fixe; on mène à ce cercle deux tangentes AM_1 , AM_2 et la corde des contacts M_1M_2 . A quelles valeurs du rayon variable correspond le maximum : 1^o du périmètre du triangle AM_1M_2 ; 2^o de l'aire de ce triangle; 3^o de la corde des contacts? (HARKEMA.)

Posons, pour simplifier, $AM_1 = AM_2 = t$, $M_1O = r$, $M_1M_2 = 2m$, $AP = p$, $AO = 2K$.

1^o Maximum du périmètre $2(t + m)$. — Nous pouvons considérer seulement le demi-périmètre $t + m$; les deux triangles AM_1O , AM_1P donnent

$$t = \sqrt{4K^2 - r^2}, \quad m = \frac{tr}{2K};$$

on a donc

$$t + m = \frac{\sqrt{4K^2 - r^2}(2K + r)}{2K} = \frac{(2K - r)^{\frac{1}{2}}(2K + r)^{\frac{3}{2}}}{2K}.$$

On voit facilement que la somme des facteurs est constante, et, par suite, que le maximum aura lieu pour la valeur de r satisfaisant à la relation

$$\frac{2K + r}{3} = \frac{2K - r}{1} = \frac{4K}{4},$$

d'où

$$r = K.$$

2^o Maximum de l'aire pm . — Les deux triangles AM_1O , AM_1P donnent

$$p = \frac{t^2}{2K}, \quad m = \frac{tr}{2K};$$

(284)

ou a donc

$$\rho m = \frac{t^3 r}{4K^2} = \frac{(t^2)^{\frac{3}{2}} (r^2)^{\frac{1}{2}}}{4K^2}.$$

Or le triangle $\Lambda M_1 O$ donne

$$(1) \quad t^2 + r^2 = 4K^2 \text{ (quantité constante);}$$

le maximum aura donc lieu pour la valeur de r satisfaisant à

$$\frac{t^2}{3} = \frac{r^2}{1} = \frac{4K^2}{4},$$

d'où

$$r = K.$$

3° *Maximum de la corde 2m.* — Nous pouvons considérer seulement la demi-corde m ; nous avons trouvé précédemment

$$m = \frac{tr}{2K} = \frac{(t^2 r^2)^{\frac{1}{2}}}{2K}.$$

La relation (1) nous montre que le maximum aura lieu pour $t^2 = r^2$, c'est-à-dire, en vertu de la même relation, pour $r^2 = 2K^2$ ou $r = K\sqrt{2}$.

Remarque. — On peut encore trouver ce dernier maximum par deux autres méthodes :

1° En posant $OP = q$, on a

$$m^2 = pq;$$

or, $p + q$ est constant et égal à $2K$: donc le maximum aura lieu pour $p = q = K = m$, et, par suite, pour $r = K\sqrt{2}$, en vertu de la relation

$$r^2 = m^2 + q^2,$$

donnée par le triangle M, PO , qui devient

$$r^2 = 2K^2.$$

2° Les angles AM_1O , AM_2O étant droits, le lieu des points M_1, M_2 est la circonférence décrite sur AO comme diamètre; la corde M_1M_2 sera donc maximum quand elle sera précisément l'un des diamètres du lieu, et, par suite, lorsque le triangle M_1PO donnera la relation

$$r^2 = 2K^2,$$

et que l'on aura par conséquent

$$r = K\sqrt{2}.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Pisani, professeur (Italie); Droz, ingénieur à Zurich; Lez; Sondat: E. Flanquemberguc, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; Cauboue, Berthomieu, Barthe, Dussoudeix, élèves au lycée de Bordeaux; Bertaux (Léon), élève à l'athénée de Mons (classe de M. Cambier); Rousselot, élève au lycée de Saint-Brieuc; Biette, élève au lycée du Havre; A. Venard, du lycée de Clermont; Tarraud (Gabriel), élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux (classe de M. Escary); Henri Picat, du lycée de Grenoble; Georges Lambiotte.

M. Tarraud a donné les solutions des questions analogues, relatives à une sphère et au cône circonscrit.

Question 1226

(voir 2^e série, t. XVI, p. 192);

PAR M. J. DE VIRIEU,

Professeur à Lyon.

ÉNONCÉ.

Rendre calculable par logarithmes

$$\sin x = \frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \sin b}.$$

SOLUTION.

L'expression proposée donne

$$1 + \sin x = \frac{(1 + \sin a)(1 + \sin b)}{1 + \sin a \sin b},$$

$$1 - \sin x = \frac{(1 - \sin a)(1 - \sin b)}{1 + \sin a \sin b};$$

d'où

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \left(\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} \right) \left(\frac{1 + \sin b}{1 - \sin b} \right),$$

$$\text{tang} \left(\frac{1}{4} \varpi + \frac{1}{2} x \right) = \pm \text{tang} \left(\frac{1}{4} \varpi + \frac{1}{2} a \right) \text{tang} \left(\frac{1}{4} \varpi + \frac{1}{2} b \right).$$

Nota. — Autres solutions de MM. Jamet; Moret-Blanc; Auguste Morel; Gustave Choquet, maître répétiteur au lycée de Lille; Barthe; Dessoudeix; Berthomieu, élèves au lycée de Bordeaux; Ferdinando Pisani; Joseph Bardelli, à Milan; Sondat, à Annecy.