Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 376-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__376_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1208

(voir p. 240);

PAR MM. L. PORTAIL ET EUG. BIARD,
Élèves au lycée de Lille.

Trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles doublement tangentes à une hyperbole équilatère, de manière que les axes de ces paraboles conservent une direction constante donnée. Lieu des sommets des mêmes paraboles. (GAMBEY.)

Prenons pour origine le centre de l'hyperbole et pour axes de coordonnées deux diamètres conjugués de cette courbe, dont l'un OX soit parallèle à la direction donnée. Soit θ l'angle des axes.

L'équation de l'hyperbole est $x^2 - y^2 = a^2$ (*), et l'équation d'une conique doublement tangente à cette hyperbole est

$$x^2 - y^2 - a^2 - (mx + ny + p)^2 = 0.$$

Exprimons que cette dernière équation représente une parabole dont l'axe est parallèle à OX. Les termes du second degré se réduisent au terme en y^2; on a les relations suivantes :

$$1 - m^2 = 0, \quad 2mn = 0, \quad \text{et par suite} \quad n = 0.$$

L'équation de la parabole se réduit à

$$(1). \qquad y^2 + 2mpx + a^2 + p^2 = 0.$$

Soient α, β les coordonnées du foyer. C'est le point d'intersection des tangentes menées à la conique des points circulaires à l'infini. Exprimons que ces tangentes forment un cercle évanouissant. Leur équation est

$$\begin{aligned}(y^2 + 2mpx + a^2 + p^2)(\beta^2 + 2mp\alpha + a^2 + p^2)\\ - [\beta y + mp(x + \alpha) + a^2 + p^2]^2 = 0.\end{aligned}$$

En égalant entre eux les coefficients de x^2, y^2 et le coefficient du rectangle des variables, divisé par $2\cos\theta$, on a les relations

$$2mp\alpha + a^2 + p^2 = - m^2p^2 = - \frac{mp\beta}{\cos\theta}.$$

On en déduit, puisque $m^2 = 1$, et que p n'est pas nul,

$$p = \frac{m\beta}{\cos\theta},$$

(*) En admettant que l'axe OX rencontre la courbe en des points réels.

d'où

$$\frac{2\beta^2}{\cos^2\theta}+\frac{2\alpha\beta}{\cos\theta}+a^2=0.$$

Telle est l'équation du lieu, où α et β représentent les coordonnées courantes. Ce lieu est une hyperbole de même centre que l'hyperbole donnée ; l'une de ses asymptotes est l'axe OX ; l'autre asymptote, qui a pour équation $\beta+\alpha\cos\theta=0$, est perpendiculaire à l'axe des y (*).

Lieu des sommets. — Prenons les mêmes axes de coordonnées. L'équation de la parabole est

$$(1)\qquad y^2+2mpx+a^2+p^2=0=f(x,y),$$

avec la relation

$$(2)\qquad m^2=1.$$

Le diamètre des cordes perpendiculaires à OX, c'est-à-dire l'axe de la parabole, a pour équation

$$f'_x-\frac{1}{\cos\theta}f'_y=0,$$

(*) La construction geometrique du foyer d'une parabole satisfaisant aux conditions du probleme proposé conduit bien simplement à l'equation $\frac{2y^2}{\cos^2\theta}+\frac{2xy}{\cos\theta}+a^2=0$, et montre, de plus, que la distance du foyer à la droite OX augmente sans limite lorsque la corde des contacts s'eloigne indefiniment du centre de l'hyperbole donnee. Le minimum de cette distance est $\frac{a.\sin 2\theta}{2}$. De sorte que les foyers des paraboles dont il s'agit, *doublement tangentes à l'hyperbole équilatère, en des points réels*, appartiennent aux branches de l'hyperbole representée par l'equation $\frac{2y^2}{\cos^2\theta}+\frac{2xy}{\cos\theta}+a^2=0$, qui ont pour asymptote la perpendiculaire à l'axe des y menee par l'origine des coordonnees.

Lorsque la droite OX ne rencontre pas l'hyperbole équilatère en des points reels, l'equation du lieu cherche est $\frac{2y^2}{\cos^2\theta}+\frac{2xy}{\cos\theta}-a^2=0$.

(G.)

ou

$$(3) \qquad mp - \frac{y}{\cos\theta} = 0.$$

L'élimination de m et de p, entre les équations (1), (2), (3), donne immédiatement

$$y^2 + \frac{2xy}{\cos\theta} + a^2 + \frac{y^2}{\cos^2\theta} = 0,$$

$$y^2(1 + \cos^2\theta) + 2xy\cos\theta + a^2\cos^2\theta = 0,$$

équation qui représente aussi une hyperbole concentrique à l'hyperbole donnée, et dont les asymptotes sont l'une OX, et l'autre la droite qui a pour équation

$$y(1 + \cos^2\theta) + 2x\cos\theta = 0.$$

Cas particulier. — Si la direction donnée est celle de l'un des axes de l'hyperbole, c'est cet axe qui est, à la fois, le lieu géométrique des foyers et des sommets.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Moret-Blanc; Bourguet; Chadu; Trantmann; Édouard Guillet et F. Tailhan, maîtres répétiteurs au lycée de Moulins; Berthomieu, du lycée de Bordeaux; Paul Souverain, du lycée de Moulins; Eugène Maurial, du lycée d'Angers (classe de M. Boucher).

Question 1211

(voir p. 288);

PAR M. ÉDOUARD GUILLET,
Maître-répétiteur au lycée de Moulins.

On donne sur un plan un point fixe P; *un cercle* O *et un point* A *sur la circonférence de ce cercle. Une circonférence* O′, *variable, passe constamment par le point* A, *et son centre est situé sur la circonférence* O; *déterminer l'enveloppe des polaires du point* P, *par rapport à* O′. (LAISANT.)

Je prends pour axe de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle O, l'axe des x passant par le point fixe A. L'équation du cercle O est

$$(1) \qquad x^2+y^2-r^2=0.$$

Soient α, β les coordonnées d'un point quelconque O' de la circonférence de ce cercle, on aura

$$(2) \qquad \alpha^2+\beta^2-r^2=0.$$

Le cercle O' dont le centre est le point (α, β), et qui passe en A, a pour équation

$$(3) \qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2\alpha r-r^2=0.$$

Si p et q sont les coordonnées du point fixe P, la polaire de ce point, par rapport au cercle O', a pour équation

$$(4) \quad \alpha(x+p-2r)+\beta(y+q)-(px+qy-r^2)=0.$$

Je prends la dérivée de cette dernière équation par rapport à α, en y considérant β comme une fonction de α, définie par l'équation (2). J'obtiens ainsi l'équation

$$(5) \qquad \alpha(y+q)-\beta(x+p-2r)=0.$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, il suffit d'éliminer α et β entre les équations (2), (4) et (5), ce qui donne

$$\begin{aligned}&(p^2-r^2)x^2+2pqxy+(q^2-r^2)y^2\\&\quad-4r^2(p-r)x-4qr^2y-(p^2+q^2)r^2+4pr^3-3r^4=0.\end{aligned}$$

On voit que le lieu cherché est une hyperbole, ou une ellipse, ou une parabole, suivant qu'on a

$$p^2+q^2-r^2>0, \quad <0, \text{ ou } =0.$$

Dans le premier cas, le point P est extérieur au cercle fixe O; dans le second, il est intérieur, et dans le dernier cas, il appartient à la circonférence de ce cercle.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; Chadu; Louis Goulin; Paul Souverain; Leloutre et Portail.

M. Moret-Blanc a donné une solution géométrique de la question proposée et l'a généralisée en substituant au cercle fixe une conique quelconque.

Question 1212

(voir p. 288);

PAR M. H. BARTHE,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

*Par les différents points m d'une ellipse on mène des normales à la courbe, et sur chacune d'elles on prend, à partir du point m, des segments m*M, *m*M′, *égaux au demi-diamètre conjugué de celui qui passe en m; démontrer que les lieux géométriques des points* M, M′ *sont deux circonférences concentriques à l'ellipse, dont les rayons sont respectivement égaux à la somme et à la différence des demi-axes de la courbe.*

(JOSEPH BRUNO.)

Soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées du point m; ρ le demi-diamètre conjugué de celui qui passe en m.

L'équation de la normale est

$$y - b\sin\varphi = \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}(x - a\cos\varphi);$$

d'où

$$\frac{y - b\sin\varphi}{a\sin\varphi} = \frac{x - a\cos\varphi}{b\cos\varphi} = \frac{\sqrt{(y - b\sin\varphi)^2 + (x - a\cos\varphi)^2}}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Mais on a

$$\rho^2 + a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = a^2 + b^2,$$

d'où

$$\rho^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

De plus, en désignant par x, y les coordonnées d'un point du lieu,

$$\sqrt{(y - b\sin\varphi)^2 + (x - a\cos\varphi)^2} = \rho,$$

on a donc

$$\frac{y - b\sin\varphi}{a\sin\varphi} = \pm 1 \quad \text{et} \quad \frac{x - a\cos\varphi}{b\cos\varphi} = \pm 1$$

L'élimination de φ se fait immédiatement

Le signe $+$ donne

$$x^2 + y^2 = (a + b)^2,$$

et le signe $-$ donne

$$x^2 + y^2 = (a - b)^2.$$

Note — La même question a été résolue par MM Moret-Blanc, Chadu, Lez, Sondat, Edouard Guillet, Louis Goulin, Paul Souverain, Berthomieu, Ch Brunot, élève au lycée de Dijon, Leloutre et Portail, Augustin, du lycée de Tours (classe de M Pellet), Albert Devos, du lycée de Lille, Vincent Fiore, à Naples

MM. Moret-Blanc Berthomieu, Albert Devos et Fiore ont démontré la proposition énoncée, au moyen de calculs très simples fondés sur les relations qui existent entre les axes et les diamètres conjugués de l'ellipse

M Ch Brunot remarque

1° Que les lieux géométriques des points M, M' sont les mêmes que ceux des points tels que les distances mM, mM' soient égales à la moyenne géométrique entre les rayons vecteurs Fm, F'm du point m

C'est qu'effectivement cette moyenne géométrique est égale au rayon conjugué du rayon mené au point m, proposition qui, sans être nouvelle, peut encore être rappelée quand l'occasion s'en présente

2° Qu'on trouve encore les mêmes lieux, en prenant mM, mM' égales à la moyenne géométrique entre les segments déterminés sur chaque normale par les axes de l'ellipse

Cela revient à dire que la moyenne géométrique entre les deux segments de la normale est égale à celle des deux rayons vecteurs menés au pied de la normale Ce qui est une proposition connue (G)

Question 1213

(voir p. 288);

PAR M. CHARLES RICHARD,
Élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Marseille.

Soient A, B, C, D, E *les sommets consécutifs d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle, et* M *un point quelconque de l'arc* AE : *démontrer géométriquement que*

$$MB + MD = MA + MC + ME.$$

(BURTAIRE.)

Je prends à partir du point M, sur les cordes MB, MD, des longueurs MA′, ME′, respectivement égales aux cordes MA, ME, et je mène les droites AA′, EE′ qui rencontrent la circonférence, l'une en P, l'autre en Q, et se coupent en I (*).

L'angle AMA′ au sommet du triangle isoscèle MAA′ valant $\frac{2}{5}$ d'angle droit, l'angle MA′A, à la base de ce triangle, vaut $\frac{4}{5}$ d'angle droit, ainsi que l'angle DMB, d'où il résulte que la droite AP est parallèle à MD. On démontrerait de même que la droite EQ est parallèle à MB.

On conclut facilement de ce qui précède que les deux quadrilatères A′BQI, E′DPI sont des parallélogrammes, et par suite l'égalité à démontrer peut s'écrire

$$(E'I + IQ) + (A'I + IP) = E'I + MC + A'I;$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où

$$IQ + IP = MC.$$

Or les deux cordes MC, EQ sont égales; en effet, elles sous-tendent des arcs respectivement égaux à

$$MA + AB + BC, \quad \text{et} \quad QC + CD + DE.$$

Mais l'arc MA, différence de AE, ME, est égal à l'arc QC, différence des arcs BC, BQ; en outre, les quatre arcs AB, BC, CD, DE sont égaux entre eux, d'après l'hypothèse; donc les cordes MC, EQ sont égales, et la relation à démontrer devient

$$IQ + IP = EQ, \quad \text{ou bien} \quad IP = IE.$$

Or l'angle PIQ, qui a pour mesure la demi-somme des arcs AE, PQ, étant égal à BMD, vaut $\frac{2}{5}$ d'angle droit, et comme l'arc AE est $\frac{1}{5}$ de la circonférence, il en est nécessairement de même de l'arc PQ; donc les angles EPI, PEI du triangle EIP sont égaux, et par conséquent les côtés IP, EI de ce triangle sont, de même, égaux entre eux. Le théorème est donc démontré.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; Chadu; H. Barthe, elève en Mathématiques speciales, au lycée de Poitiers; Ch. Cochez; Ch. Richard; Augustin, du lycee de Tours; Leonce Cléry, élève en Mathematiques elémentaires, au lycée d'Annecy; E. Carpentier, du lycée de Lille; Vincent Fiore, à Naples.

M. Chadu generalise ainsi la proposition : « Soit un polygone régulier de $2n+1$ côtes, inscrit dans un cercle; si l_1, l_2, ..., l_{2n+1} sont les droites menées d'un point quelconque de l'arc $(1, 2n+1)$, aux sommets du polygone, on a $l_1 + l_3 + \ldots + l_{2n+1} = l_2 + l_4 + \ldots + l_{2n}$.

Cette proposition générale merite d'être remarquee; la démonstration que M. Chadu en a donnée est très-simple. (G).