NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. REALIS

Sur l'intégrale $\int \cos^{2m+1} x dx$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 83-88

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__83_1>

SUR L'INTÉGRALE $\int \cos^{2m+1} x\, dx$;

PAR M. S. REALIS.

1. Dans les Traités de Calcul intégral se trouve rapportée, d'après Euler, la formule

$$\begin{aligned}
&\int \cos^{2m+1} x\, dx \\
&= \frac{\sin x}{2m+1}\left[\cos^{2m}x \, \frac{2m}{2m-1}\cos^{2m-2}x \right.\\
&\qquad + \frac{2m(2m-2)}{(2m-1)(2m-3)}\cos^{2m-4}x + \ldots \\
&\qquad \left. + \frac{2m(2m-2)\ldots 6.4.2}{(2m-1)(2m-3)\ldots 5.3.1}\right] + \text{const.},
\end{aligned}$$

et la formule analogue relative à $\int \sin^{2m+1} x\, dx$, pour m entier et positif.

Mais ce que les auteurs négligent de signaler, du moins d'une manière explicite, c'est la forme simple et mnémonique que prend le second membre de la formule ci-dessus lorsqu'on en fait disparaître les cosinus, en y changeant $\cos^2 x$ en $1 - \sin^2 x$. On trouve en effet, abstraction faite de la constante introduite par l'intégration,

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin^3 x}{3},$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{\sin x}{1} - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5},$$

$$\int \cos^7 x\,dx = \frac{\sin x}{1} - 3\frac{\sin^3 x}{3} + 3\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7},$$

$$\int \cos^9 x\,dx = \frac{\sin x}{1} - 4\frac{\sin^3 x}{3} + 6\frac{\sin^5 x}{5} - 4\frac{\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où l'on voit apparaître les coefficients binômiaux, et d'où l'on peut conclure, par une induction sûre,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \cos^{2m+1} x\,dx = {} & \frac{\sin x}{1} - m\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{\sin^5 x}{5} \\ & - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\frac{\sin^7 x}{7} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et aussi, par conséquent,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \sin^{2m+1} x\,dx = {} & -\frac{\cos x}{1} + m\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{m(m-1)}{2}\frac{\cos^5 x}{5} \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,3}\frac{\cos^7 x}{7} - \ldots. \end{aligned} \right.$$

Mais une remarque qu'il importe d'ajouter, c'est que les formules (1) et (2), construites ici dans l'hypothèse de m entier et positif, ont lieu, en réalité, pour toute valeur positive ou négative de m.

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à développer en série l'intégrale $\int \cos^{2m+1} x\,dx$, après l'avoir mise sous la forme $\int (1-\sin^2 x)^m d\sin x$. On obtient en effet, après la réduction de $(1 - \sin^2 x)^m$ en série et l'intégration,

$$\int (1 - \sin^2 x)^m \, d \sin x$$
$$= \frac{\sin x}{1} - m \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{m(m-1)}{2} \frac{\sin^5 x}{5} - \ldots,$$

quel que soit l'exposant réel m, et en admettant que la fonction $\sin x$ reste comprise entre les limites -1 et $+1$.

Le second membre de cette équation, auquel on peut ajouter une constante arbitraire, tant que l'intégrale reste indéfinie, est une expression finie dans le cas de m entier et positif, et présente, dans les autres cas, une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de $\sin x$.

Pour $\sin x = \pm 1$, la série qu'on vient d'écrire continue d'être convergente si $m > -1$, et, en ce cas, elle convient encore à l'intégrale considérée. Si l'on a $m \overline{\overline{<}} -1$, la série n'a pas de limite finie pour $\sin x = \pm 1$; cependant, comme alors l'intégrale devient infinie en même temps que la série, l'équation peut encore être regardée comme donnant un résultat exact.

D'après cela, la formule (1) subsiste, quel que soit le nombre m, et pour toutes les valeurs de $\sin x$ qui ne dépassent pas les limites -1 et $+1$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de l'arc x.

Cette conclusion se rapporte au cas de l'intégrale indéfinie. A l'égard des intégrales définies, il sera facile de voir que l'intégration doit être effectuée dans une étendue où la fonction $\cos x$ ne change pas de signe. Sans cette condition, l'application immédiate de la formule (1) par la substitution des limites de x n'aurait lieu, d'une manière générale, que pour les valeurs positives de $2m + 1$.

Quant à la formule (2), elle n'est qu'une transformée de (1), ces deux formules se déduisant l'une de l'autre par le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$.

2. Soit fait, comme application de ce qui précède, $m = -\frac{1}{2}$, ou $2m + 1 = 0$, et ajoutons la condition que l'intégrale (1) s'annule pour $x = 0$. La constante de l'intégration sera nulle, la valeur de l'intégrale ne sera autre chose que x, et l'on aura, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pm \frac{\pi}{2}$,

$$x = \frac{\sin x}{1} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 x}{7} + \ldots,$$

formule bien connue.

Soit encore $m = -\frac{3}{2}$, ou $2m + 1 = -2$, et supposons de même que l'intégrale et la variable s'annulent ensemble. Le premier membre de la formule (1) sera

$$\int_0^x \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x,$$

et l'on aura ainsi

$$\operatorname{tang} x = \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^5 x + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^7 x + \ldots,$$

pour tous les arcs x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et même pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$, ce qui est exact.

Prenons, pour dernier exemple, $m = -1$, c'est-à-dire $2m + 1 = -1$, et appliquons la formule (2). Nous obtiendrons, en intégrant entre les limites x et $\frac{\pi}{2}$, et faisant attention que

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \log\cot\frac{2}{x},$$

l'égalité

$$\log\cot\frac{x}{2}=\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+\ldots,$$

depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$. Ce résultat nous représente, sous une forme spéciale, une série logarithmique d'Euler.

3. Le second membre de la formule (1), en y mettant en évidence le facteur commun $\sin x$, puis remplaçant dans le développement chaque terme $\sin^{2k}x$ par $(1-\cos^2 x)^k$, peut être mis sous la forme

$$\sin x\,(A_1+A_2\cos^2 x+A_3\cos^4 x+A_4\cos^6 x+\ldots).$$

Dans le cas de m entier et positif, et en supprimant la constante introduite par l'intégration, il devra y avoir identité entre cette expression et le second membre de la formule d'Euler, rappelée au commencement de cet article. Après avoir divisé ces deux expressions par le facteur commun $\sin x$, on pourra donc égaler entre eux les coefficients des mêmes puissances de $\cos x$, et l'on amènera par là des relations d'identité qu'il peut être utile de connaître.

Il vient, par exemple, en égalant de part et d'autre les termes indépendants de $\cos x$,

$$1-\frac{1}{3}m+\frac{1}{5}\frac{m(m-1)}{2}-\frac{1}{7}\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}+\ldots\pm\frac{1}{2m+1}$$
$$=\frac{1}{2m+1}\,\frac{2m(2m-2)(2m-4)\ldots6.4.2}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots5.3.1},$$

à partir de $m=1$; ce résultat s'obtient aussi en comparant les expressions de l'intégrale définie $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m+1}x\,dx$ fournies par les deux formules que nous considérons.

La comparaison des coefficients de $\cos^2 x$ donne

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5}(m-1) + \frac{1}{7}\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$
$$- \frac{1}{9}\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3} + \ldots \mp \frac{1}{2m+1}$$
$$= \frac{1}{2m+1}\frac{(2m-2)(2m-4)(2m-6)\ldots 6.4.2}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 7.5.3},$$

à partir de $m = 2$.

On trouve de même, d'après les coefficients de $\cos^4 x$,

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{7}(m-2) + \frac{1}{9}\frac{(m-2)(m-3)}{2}$$
$$- \frac{1}{11}\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3} + \ldots \pm \frac{1}{2m+1}$$
$$= \frac{1}{2m+1}\frac{(2m-4)(2m-6)(2m-8)\ldots 6.4.2}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 9.7.5},$$

à partir de $m = 3$.

Et ainsi de suite. Ces relations ont de l'analogie avec celles qui font l'objet des questions 1079 et 1080, proposées par M. Haton de la Goupillière, et résolues par M. Moret-Blanc et par d'autres (*voir* 2^e^ série, t. XI, p. 192, 519 et 520).